

## 第六章 平面电磁波

前一章我们从麦克斯韦方程组出发，导出了波动方程。这些方程在一定的边界条件和初始条件下的解，表示电磁场在给定条件下的空间分布和随时间的变化规律——电磁波。本章我们介绍波动方程的均匀平面波解，并讨论均匀平面电磁波在不同媒质中的传播特性，其主要内容有：

- 无耗媒质中的平面电磁波
- 导电媒质中的平面电磁波
- 电磁波的极化
- 电磁波的色散和群速
- 平面电磁波的反射和折射

电磁波是自然界许多波动现象中的一种，它具有波动的一般规律，但也有其特殊的性质。电磁波根据其空间等相位面的形状分类为：平面电磁波、柱面电磁波和球面电磁波。平面电磁波是指电磁波的场矢量的等相位面是与电磁波传播方向垂直的无限大平面，它是矢量波动方程的一个特解。严格地说，理想的平面电磁波是不存在的，因为只有无限大的波源才能激励出这样的波。但是如果场点离波源足够远的话，那么空间曲面的很小一部分就十分接近平面。在这一小范围内，波的传播特性也近似为平面波。例如，在远离发射天线的接收点附近的电磁波，可以近似地看成平面电磁波。在平面电磁波中，均匀平面电磁波又是最简单的电磁波。所谓均匀平面电磁波是指等相位面为无限大平面，且等相位面上各点的场强大小相等、方向相同的电磁波，即沿某方向传播的平面电磁波的场量除随时间变化外，只与波传播方向的坐标有关，而与其它坐标无关。

实际存在的电磁波(球面电磁波、柱面电磁波)均可以分解成许多均匀平面电磁波。均匀平面电磁波也是麦克斯韦方程最简单的解和许多实际波动问题的近似。因此，均匀平面电磁波是研究电磁波的基础，有着十分重要的理论意义和实际价值。

### 6.1 无耗媒质中的平面电磁波

无耗媒质意味着描述媒质电磁特性的电磁参数满足条件： $\sigma=0$ ， $\epsilon$ 、 $\mu$  为实常数。无源意味着无外加场源，即  $\rho=0$ ， $J=0$ 。

### 6.1.1 无耗媒质中齐次波动方程的均匀平面波解

设无源、无界空间充满无耗的简单媒质,那么电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  满足式(5-61)和式(5-62)的波动方程,它们常被写为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (6-1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (6-2)$$

式中  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 。

在直角坐标系中,假设均匀平面电磁波沿  $z$  轴方向传播,如图 6-1 所示,则因场矢量在  $xy$  平面(等相位面)内各点无变化,故有

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = \mathbf{0} \quad (6-3)$$

因此,电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  只是直角坐标  $z$  和时间  $t$  的函数。此时波动方程式(6-1)和式(6-2)是关于直角坐标  $z$  的一维波动方程,将  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t)$  和  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z, t)$  分别代入无源区域中无耗、线性、均匀、各向同性媒质限定的麦克斯韦方程组中,并在直角坐标系中展开,可得到下列方程组

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, & 0 &= \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, & 0 &= \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned}$$

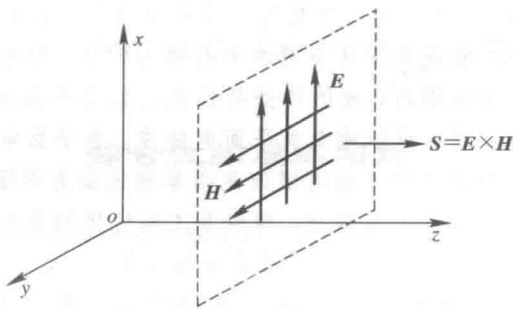


图 6-1 均匀平面电磁波的传播

由

$$0 = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \text{和} \quad 0 = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

可以看出,  $E_z(z, t)$  和  $H_z(z, t)$  是与时间无关的恒分量。在波动方程问题中,常量没有意义,故可取  $E_z(z, t) = 0$  和  $H_z(z, t) = 0$ 。

综上所述

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x(z, t) + \mathbf{e}_y E_y(z, t)$$

类似分析可得

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_x H_x(z, t) + \mathbf{e}_y H_y(z, t)$$

如第五章所述,我们只需求式(6-1)的解,相应的磁场强度  $\mathbf{H}$  可以直接由麦克斯韦方程得出。由于矢量波动方程式(6-1)在直角坐标系中对应于三个形式相同的标量波动方程,所以根据叠加原理,可以分别讨论  $E_x(z, t)$  和  $E_y(z, t)$ 。若以  $E_x(z, t)$  为例(假设电场强度  $\mathbf{E}$  只有  $E_x(z, t)$  分量),则矢量波动方程式(6-1)变为标量波动方程:

$$\frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6-4)$$

此方程的通解为

$$E_x(z, t) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt) \quad (6-5)$$

式中  $f_1(z - vt)$  和  $f_2(z + vt)$  是  $(z - vt)$  和  $(z + vt)$  的任意函数。可以证明,  $f_1(z - vt)$  和  $f_2(z + vt)$  是式(6-4)的两个特解。

现在让我们说明特解  $E_x(z, t) = f_1(z - vt)$  的物理意义。在某特定时刻  $t = t_1$ ,  $f_1(z - vt_1)$  是  $z$  的函数,如图 6-2(a)所示。当时间  $t_1$  增大到  $t_2$  时,相应的  $f_1(z - vt_2)$  仍是  $z$  的函数,其形状与图 6-2(a)相同,但向右移动了  $v(t_2 - t_1)$  的距离,如图 6-2(b)所示。这说明  $f_1(z - vt)$  是一个以速度  $v$  向  $+z$  方向传播的波。同样的分析可知,  $E_x = f_2(z + vt)$  表示一个以速度  $v$  向  $-z$  方向传播的波。

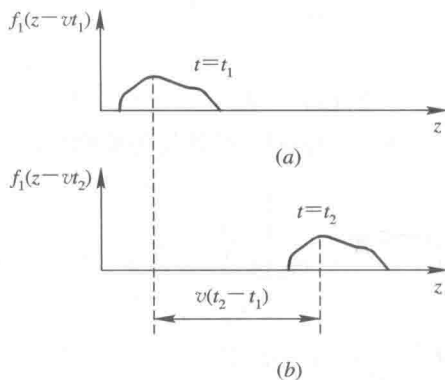


图 6-2 向  $+z$  方向传播的波

在无界媒质中,一般没有反射波存在,只有单一行进方向的波。如果假设均匀平面电磁波沿  $+z$  方向传播,电场强度只有  $E_x(z, t)$  分量,则波动方程式(6-4)的解为

$$E_x(z, t) = f(z - vt)$$

由麦克斯韦方程式(5-28b)可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z, t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

即

$$\mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (6-6)$$

显然,磁场强度  $\mathbf{H}$  只有  $H_y(z, t)$  分量。磁场强度  $\mathbf{H}$  的矢量波动方程式(6-2)可简化为标量波动方程:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \quad (6-7)$$

类似电场强度的讨论,对于沿 $+z$ 方向传播的均匀平面电磁波,方程式(6-7)的特解应写为

$$H_y(z, t) = g(z - vt)$$

于是可写出沿 $+z$ 方向传播的均匀平面电磁波的电场强度和磁场强度的表达式:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t) = \mathbf{e}_x f(z - vt) \quad (6-8a)$$

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{e}_y H_y(z, t) = \mathbf{e}_y g(z - vt) \quad (6-8b)$$

式(6-8)表明,均匀平面电磁波的电场强度矢量和磁场强度矢量均与传播方向垂直,没有传播方向的分量。也就是说,对传播方向而言,电磁场只有横向分量,没有纵向分量。这种电磁波称为横电磁波(Transverse Electro-Magnetic Wave),或称为 TEM 波。TEM 波的电场强度、磁场强度和传播方向三者构成右手正交系,如图 6-1 所示。

对于正弦电磁场,无源、无界、无耗简单媒质中的波动方程是式(5-63)和式(5-64)。在直角坐标系中,假设均匀平面波沿 $z$ 方向传播,电场强度只有 $x$ 方向坐标分量 $E_x(z)$ ,则波动方程式(5-63)可以简化为

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + k^2 E_x(z) = 0 \quad (6-9)$$

式(6-9)的解为

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{+jkz} \quad (6-10)$$

将上式代入麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ ,得到均匀平面波的磁场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{j}{\omega\mu} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu} \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \mathbf{e}_y [(-jk)E_0^+ e^{-jkz} + (jk)E_0^- e^{+jkz}] \\ &= \frac{j}{\omega\mu} \mathbf{e}_y (-jk)(E_0^+ e^{-jkz} - E_0^- e^{+jkz}) \\ &= \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta} (E_0^+ e^{-jkz} - E_0^- e^{+jkz}) \\ &= \mathbf{e}_y (H_0^+ e^{-jkz} + H_0^- e^{+jkz}) \end{aligned} \quad (6-11)$$

式中:

$$\eta = \frac{E_0^+}{H_0^+} = -\frac{E_0^-}{H_0^-} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (6-12)$$

$\eta$  具有阻抗的量纲,单位为欧姆( $\Omega$ ),它的值与媒质参数有关,因此它被称为媒质的波阻抗(或本征阻抗)。真空中的介电常数和磁导率为

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

将它们代入式(6-12),得电磁波在真空中的本征阻抗为

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \Omega$$



### 6.1.2 均匀平面波的传播特性

假设均匀平面波沿 $+z$ 方向传播, 电场强度只有 $x$ 方向的坐标分量 $E_x(z)$ 。由于无界媒质中不存在反射波, 所以正弦均匀平面电磁波的复场量可以表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_0 e^{-jkz} \quad (6-13a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H_y = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} = \mathbf{e}_y H_0 e^{-jkz} \quad (6-13b)$$

式中 $E_0 = E_{0m} e^{j\phi_0}$ 为 $z=0$ 处的复振幅。式(6-13)所对应的瞬时值表达式为

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}[\mathbf{e}_x E_0 e^{j(\omega t - kz)}] = \mathbf{e}_x E_{0m} \cos(\omega t - kz + \phi_0) \quad (6-14a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, t) &= \text{Re}\left[\mathbf{e}_y \frac{E_0}{\eta} e^{j(\omega t - kz)}\right] = \mathbf{e}_y \frac{E_{0m}}{\eta} \cos(\omega t - kz + \phi_0) \\ &= \mathbf{e}_y H_{0m} \cos(\omega t - kz + \phi_0) \end{aligned} \quad (6-14b)$$

式中: $E_{0m}$ 是实常数, 表示电场强度的振幅值; $\omega t$ 称为时间相位; $kz$ 称为空间相位。式(6-14)表明, 正弦均匀平面电磁波的电场和磁场在空间上互相垂直, 在时间上是同相的, 它们的振幅之间有一定的比值, 此比值取决于媒质的介电常数和磁导率。图6-3表示在 $t=0$ 时刻电场强度矢量和磁场强度矢量在空间沿 $+z$ 轴的分布(初始相位 $\phi_0=0$ )。

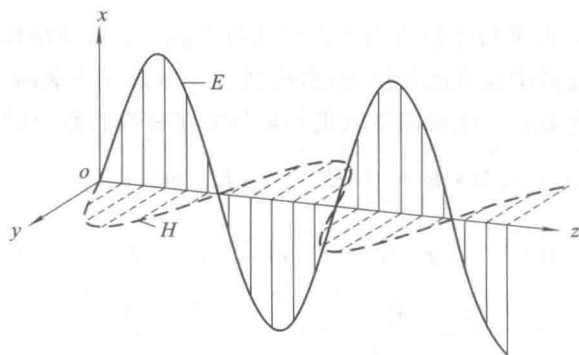


图 6-3 理想介质中均匀平面电磁波的电场和磁场空间分布

由式(6-14)可见, 正弦均匀平面电磁波的等相位面方程为

$$\omega t - kz = \text{const. (常数)}$$

平面电磁波的等相位面行进的速度称为相速, 以 $v_p$ 表示。根据相速的定义和等相位面方程有

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (6-15)$$

上式中 $v_p$ 实际上是沿波振面的法向等相位面移动的速度。

空间相位 $kz$ 变化 $2\pi$ 所经过的距离称为波长, 以 $\lambda$ 表示。按此定义有 $k\lambda=2\pi$ , 所以

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (6-16)$$

此式表明波长除了和频率有关, 还和媒质参数有关。因此, 同一频率的电磁波, 在不同媒质中的波长是不相同的。式(6-16)还可以写为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6-17)$$

$k$  称为波数。因为空间相位  $kz$  变化  $2\pi$  相当于一个全波,  $k$  表示单位长度内所具有的全波数目的  $2\pi$  倍。 $k$  也被称为电磁波的相位常数, 因为它表示传播方向上波行进单位距离时相位变化的大小。

时间相位  $\omega t$  变化  $2\pi$  所经历的时间称为周期, 以  $T$  表示。而一秒内相位变化  $2\pi$  的次数称为频率, 以  $f$  表示。由  $\omega T = 2\pi$  得

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6-18)$$

由式(6-15)和式(6-17)可知

$$v_p = \lambda f \quad (6-19)$$

由上可见, 电磁波的频率描述的是相位随时间的变化特性, 而波长描述的是相位随空间的变化特性。

下面我们讨论均匀平面电磁波的能量关系。由式(6-13)知, 复坡印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x E_0 e^{-jkz} \times \mathbf{e}_y \frac{E_0^*}{\eta} e^{jkz} = \mathbf{e}_z \frac{E_{0m}^2}{2\eta}$$

从而得坡印廷矢量的时间平均值为

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re}[\mathbf{S}] = \mathbf{e}_z \frac{E_{0m}^2}{2\eta}$$

平均功率密度为常数, 表明与传播方向垂直的所有平面上, 每单位面积通过的平均功率都相同, 电磁波在传播过程中没有能量损失(沿传播方向电磁波无衰减)。因此理想媒质中的均匀平面电磁波是等振幅波。电场能量密度和磁场能量密度的瞬时值为

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E_{0m}^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi_0)$$

$$\begin{aligned} w_m(t) &= \frac{1}{2} \mu H^2(t) = \frac{1}{2} \mu H_{0m}^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi_0) \\ &= \frac{1}{2} \mu \cdot \frac{E_{0m}^2}{\mu/\epsilon} \cdot \cos^2(\omega t - kz + \phi_0) \\ &= w_e(t) \end{aligned}$$

可见, 任一时刻电场能量密度和磁场能量密度相等, 各为总电磁能量的一半。电磁能量的时间平均值为

$$w_{av,e} = \frac{1}{4} \epsilon E_{0m}^2, w_{av,m} = \frac{1}{4} \mu H_{0m}^2, w_{av} = w_{av,e} + w_{av,m} = \frac{1}{2} \epsilon E_{0m}^2$$

我们知道, 有电磁波的传播, 就有电磁能流。电磁波的电磁能量传播速度, 简称能速, 用  $v_e$  表示, 定义为

$$v_e = \frac{|\mathbf{S}_{av}|}{w_{av}}$$

其方向为电磁能流的方向。均匀平面电磁波的能速可表示为

$$v_e = \mathbf{e}_z v_e = \mathbf{e}_z \frac{\frac{E_{0m}^2}{2\eta}}{\frac{1}{2} \epsilon E_{0m}^2} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \mathbf{e}_z v_p = v_p$$

上式表明, 均匀平面电磁波的能量传播速度等于其相速。

### 6.1.3 向任意方向传播的均匀平面波

在直角坐标系  $oxyz$  中, 我们仍然假设无界媒质中, 均匀平面波沿  $+z$  方向传播, 电场强度只有  $x$  方向的坐标分量  $E_x(z)$ , 那么正弦均匀平面电磁波的复场量还可以表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 e^{-jkz} = \mathbf{E}_0 e^{-jkz}$$

利用矢量恒等式  $\nabla \times (\Psi \mathbf{A}) = \Psi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \Psi \times \mathbf{A}$  和  $\nabla \cdot (\Psi \mathbf{A}) = \Psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \Psi \cdot \mathbf{A}$ , 将以上两式代入麦克斯韦方程  $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$  和  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-jkz}) = \frac{j}{\omega\mu} (e^{-jkz} \nabla \times \mathbf{E}_0 + \nabla e^{-jkz} \times \mathbf{E}_0) \\ &= \frac{j}{\omega\mu} [e^{-jkz} (-jk) \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0] = \frac{j}{\omega\mu} (-jk) \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{-jkz} \\ &= \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

和

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_0 e^{-jkz}) = e^{-jkz} \nabla \cdot \mathbf{E}_0 + \nabla e^{-jkz} \cdot \mathbf{E}_0 = (-jk) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}_0 e^{-jkz} = 0$$

由上式得

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E} = 0$$

综上所述, 把它们写在一起就是:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jkz}, \quad \mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6-20)$$

如果开始时我们选择直角坐标系  $ox'y'z'$ , 那么, 正弦均匀平面电磁波的复场量可以表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jkz'}, \quad \mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{e}'_z \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{e}'_z \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6-21)$$

这是向  $\mathbf{e}'_z$  方向传播的波。将直角坐标系  $ox'y'z'$  任意旋转后得新的直角坐标系  $oxyz$ , 如图 6-4 所示。

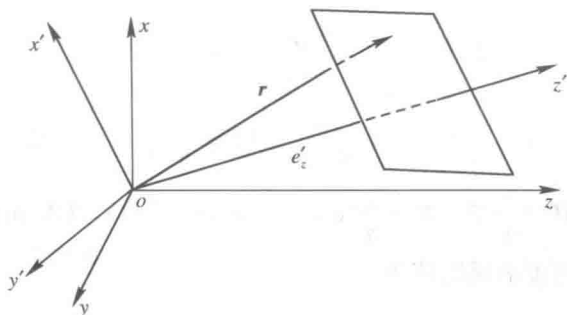


图 6-4 向  $\mathbf{k}$  方向传播的均匀平面电磁波

在直角坐标系  $oxyz$  中, 式(6-21)就是向任意方向  $\mathbf{e}'_z$  (或记为  $\mathbf{e}_k$ ) 传播的均匀平面电磁波。如以  $\mathbf{r}$  表示等相位面  $z' = \text{常数}$  上任一点的矢径, 则有  $z' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_z$ 。在直角坐标系  $oxyz$  中有

$$\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z, \quad \mathbf{e}_z' = e_x \cos\alpha + e_y \cos\beta + e_z \cos\gamma$$

式中  $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$  是  $\mathbf{e}_z'$  在直角坐标系  $oxyz$  中的方向余弦。这样式(6-21)中的相位因子为

$$kz' = k\mathbf{e}_z' \cdot \mathbf{r} = (e_x \cos\alpha + e_y \cos\beta + e_z \cos\gamma)k \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

其中  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z' = k\mathbf{e}_k = e_x k_x + e_y k_y + e_z k_z$  称为传播矢量(波矢量), 其方向是波的传播方向, 模是波数。然而, 坐标系旋转时, 矢量  $\mathbf{E}_0$  并不改变, 只是在不同坐标系中其分量不同。因此, 式(6-21)可以写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

式中  $\mathbf{e}_k$  是平面电磁波传播方向的单位矢量。

类似地, 无耗媒质中均匀平面电磁波的另一种表示形式为

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{E} = -\frac{k}{\omega\epsilon} \mathbf{e}_k \times \mathbf{H} = -\eta \mathbf{e}_k \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{H} = 0$$

**例 6-1** 已知无界理想媒质( $\epsilon = 9\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ )中正弦均匀平面电磁波的频率  $f = 10^8$  Hz, 电场强度为

$$\mathbf{E} = e_x 4e^{-jkz} + e_y 3e^{-jkz + j\frac{\pi}{3}} \quad (\text{V/m})$$

试求:

- (1) 均匀平面电磁波的相速度  $v_p$ 、波长  $\lambda$ 、相移常数  $k$  和波阻抗  $\eta$ ;
- (2) 电场强度和磁场强度的瞬时值表达式;
- (3) 与电磁波传播方向垂直的单位面积上通过的平均功率。

**解:** (1)

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{9}} = 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = 1 \text{ m}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v_p} = 2\pi \text{ (rad/m)}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 120\pi \sqrt{\frac{1}{9}} = 40\pi \Omega$$

$$(2) \quad \mathbf{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\eta} (e_y e^{-jkz} - e_x 3e^{-jkz + j\frac{\pi}{3}}) \quad (\text{A/m})$$

电场强度和磁场强度的瞬时值为

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}e^{j\omega t}]$$

$$= e_x 4 \cos(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z) + e_y 3 \cos\left(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{H}(t) = \text{Re}[\mathbf{H}e^{j\omega t}]$$

$$= -e_x \frac{3}{40\pi} \cos\left(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z + \frac{\pi}{3}\right) + e_y \frac{1}{10\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \quad (\text{A/m})$$

(3) 复坡印廷矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} [e_x 4e^{-jkz} + e_y 3e^{-j(kz-\frac{\pi}{3})}] \times \left[ -e_x \frac{3}{40\pi} e^{j(kz-\frac{\pi}{3})} + e_y \frac{1}{10\pi} e^{jkz} \right] \\ &= e_z \frac{5}{16\pi} \quad (\text{W/m}^2) \end{aligned}$$

坡印廷矢量的时间平均值:

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re}[\mathbf{S}] = e_z \frac{5}{16\pi} \quad (\text{W/m}^2)$$

与电磁波传播方向垂直的单位面积上通过的平均功率:

$$P_{av} = \int_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = \frac{5}{16\pi} \quad (\text{W})$$

## 6.2 导电媒质中的平面电磁波

在第五章我们引入了复介电常数、复磁导率和等效复介电常数的概念,以表征有耗媒质的极化、磁化和导电损耗。这一节我们以均匀平面电磁波在导电媒质( $\sigma \neq 0$ ,  $\epsilon$ 、 $\mu$  为实常数)中的传播特性为例,介绍有耗媒质中的平面电磁波。

### 6.2.1 导电媒质中平面电磁波的传播特性

无源、无界的导电媒质中麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (6-22a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (6-22b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (6-22c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6-22d)$$

式(6-22a)可以写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \left( \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} = j\omega \epsilon_c \mathbf{E} \quad (6-23)$$

其中:

$$\epsilon_c = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \quad (6-24)$$

称为导电媒质的复介电常数,它是一个等效的复数介电常数。由此可见,引入等效复介电常数后,导电媒质(有耗媒质)中的麦克斯韦方程组和无耗媒质中的麦克斯韦方程组具有完全相同的形式。因此就电磁波在其中的传播而言,可以把导电媒质等效地看作一种介质,其等效介电常数为复数。

从麦克斯韦方程式(6-23)和式(6-22b)~式(6-22d)出发,类似式(5-63)和式(5-64)的推导,可以导出波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (6-25)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (6-26)$$

式中,  $\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c$ 。

直角坐标系中, 对于沿 $+z$ 方向传播的均匀平面电磁波, 如果假定电场强度只有 $x$ 分量 $E_x$ , 那么式(6-25)的一个解为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 e^{-j\gamma z} \quad (6-27)$$

上式中, 令 $\gamma = \beta - j\alpha$ , 则 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 e^{-j(\beta - j\alpha)z} = \mathbf{e}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$ 。显然电场强度的复振幅以因子 $e^{-\alpha z}$ 随 $z$ 的增大而减小, 表明 $\alpha$ 为每单位距离衰减程度的常数, 称为电磁波的衰减常数。 $\beta$ 表示每单位距离落后的相位, 称为相位常数。 $\gamma = \beta - j\alpha$ 称为传播常数。因此电场强度的瞬时值可以表示为

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_x E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_0) \quad (6-28)$$

其中 $E_m$ 、 $\phi_0$ 分别表示电场强度的振幅值和初相角, 即 $E_0 = E_m e^{j\phi_0}$ 。

因为

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c$$

所以

$$(\beta - j\alpha)^2 = \omega^2 \mu \left( \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

故有

$$\beta^2 - \alpha^2 - j2\alpha\beta = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega\mu\sigma$$

从而有

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$$

由以上两方程解得

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad (6-29a)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right]} \quad (6-29b)$$

将式(6-27)代入式(6-22b)可得磁场强度:

$$\mathbf{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-j\gamma z} = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (6-30)$$

其中:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} = |\eta_c| e^{j\theta} \quad (6-31)$$

称为导电媒质的波阻抗, 它是一个复数。式(6-31)中:

$$|\eta_c| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (6-32a)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0 \sim \frac{\pi}{4} \quad (6-32b)$$

从式(6-32)我们看到, 导电媒质的本征阻抗是一个复数, 其模小于理想介质的本征阻抗, 幅角在 $0 \sim \pi/4$ 之间变化, 具有感性相角。这意味着电场强度和磁场强度在空间上虽然仍互相垂直, 但在时间上有相位差, 二者不再同相, 电场强度相位超前磁场强度相位。这样磁场强度可以重写为

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\gamma z} = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta} \quad (6-33)$$

其对应的瞬时值为

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{e}_y \frac{E_m}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_0 - \theta) \quad (6-34)$$

磁场强度的相位比电场强度的相位滞后  $\theta$ ，电导率  $\sigma$  愈大则滞后愈多。其振幅也随  $z$  的增加按指数衰减，如图 6-5 所示。

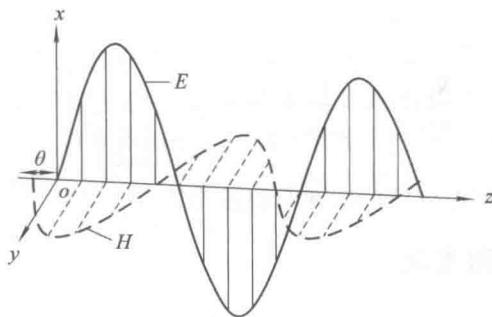


图 6-5 导电媒质中平面电磁波的电磁场

导电媒质中均匀平面电磁波的相速为

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1} \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (6-35)$$

而波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f}$$

由此可见，均匀平面电磁波在导电媒质中传播时，波的相速和波长比介电常数和磁导率相同的理想介质的情况慢和短，且  $\sigma$  愈大，相速愈慢，波长愈短。此外，相速和波长还随频率而变化，频率低，则相速慢。这样，携带信号的电磁波其不同的频率分量将以不同的相速传播。经过一段距离后，它们的相位关系将发生变化，从而导致信号失真。这种现象称为色散。所以导电媒质是色散媒质。

磁场强度矢量与电场强度矢量互相垂直，并都垂直于传播方向，因此导电媒质中的平面波是横电磁波。导电媒质中的坡印廷矢量的瞬时值、时间平均值和复坡印廷矢量分别为

$$\mathbf{S}(z, t) = \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} [\cos\theta + \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\phi_0 - \theta)]$$

$$\mathbf{S}_{av} = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos\theta$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{e}_z \frac{E_m^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} e^{j\theta}$$

导电媒质中平均电能密度和平均磁能密度分别如下：

$$\mathcal{W}_{av,e} = \frac{1}{4} \epsilon |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{4} \epsilon E_m^2 e^{-2\alpha z}$$

$$w_{av,m} = \frac{1}{4} \mu |H|^2 = \frac{1}{4} \mu \frac{E_m^2}{|\eta_c|^2} e^{-2\alpha z} = \frac{1}{4} \epsilon E_m^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}$$

显然, 在导电媒质中, 平均磁能密度大于平均电能密度。总的平均能量密度为

$$\begin{aligned} w_{av} &= w_{av,e} + w_{av,m} = \frac{1}{4} \epsilon E_m^2 e^{-2\alpha z} + \frac{1}{4} \epsilon E_m^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon E_m^2 e^{-2\alpha z} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

能量传播速度为

$$v_e = \frac{|S_{av}|}{w_{av}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left[ \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}} \right]^{1/2} = v_p$$

可见, 导电媒质中均匀平面电磁波的能速与相速相等。

### 6.2.2 集肤深度和表面电阻

通常, 按  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  的比值 (导电媒质中传导电流密度振幅与位移电流密度振幅之比  $\frac{|\sigma E|}{|j\omega \epsilon E|}$ ) 把媒质分为三类:

$$\text{电介质: } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1; \quad \text{不良导体: } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \approx 1; \quad \text{良导体: } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

值得注意的是, 媒质属于电介质还是良导体, 不仅与媒质参数有关, 而且与频率有关。

电介质(低损耗媒质)中, 例如聚四氟乙烯、聚苯乙烯和石英等材料, 在高频和超高频范围内均有  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 10^{-2}$ 。因此, 电介质中均匀平面电磁波的相关参数可以近似为

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \quad \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

可见此时相移常数和波阻抗近似与理想媒质相同, 衰减常数与频率无关, 正比于电导率。因此均匀平面电磁波在低损耗媒质中的传播特性, 除了由微弱的损耗引起的振幅衰减外, 与理想媒质中均匀平面电磁波的传播特性几乎相同。

良导体中, 有关表达式可以用泰勒级数简化并近似表达为

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}, \quad v_p = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}, \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \\ \eta_c &= \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + j) = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

由此可见, 高频电磁波传入良导体后, 由于良导体的电导率一般在  $10^7 \text{ S/m}$  量级, 所以电磁波在良导体中衰减极快, 电磁波往往在微米量级的距离内就衰减得近于零了, 因此高频电磁场只能存在于良导体表面的一个薄层内。这种现象称为集肤效应(Skin Effect)。电磁波场强振幅衰减到表面处的  $1/e$  的深度, 称为集肤深度(穿透深度), 以  $\delta$  表示。

因为

$$E_0 e^{-\delta} = E_0 \cdot \frac{1}{e}$$



所以

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} \quad (\text{m}) \quad (6-36)$$

可见导电性能越好(电导率越大),工作频率越高,则集肤深度越小。例如银的电导率  $\sigma = 6.15 \times 10^7 \text{ S/m}$ , 磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ , 由式(6-36)得

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi f \times 4\pi \times 6.15}} = \frac{0.0642}{\sqrt{f}} \quad (\text{m})$$

当频率  $f = 3 \text{ GHz}$  时,银的集肤深度  $\delta = 1.17 \times 10^{-6} = 1.17 \mu\text{m}$ 。因此,虽然微波器件通常用黄铜制成,但只要在其导电层的表面上涂以若干微米的银,就能保证表面电流主要在银层通过。由于良导体的集肤深度非常小,电磁波大部分能量集中于良导体表面的薄层内,因此金属片对无线电波都有很好的屏蔽作用,如中频变压器的屏蔽铝罩、晶体管的金属外壳,都很好地起到了隔离外部电磁场对其内部影响的作用。

良导体中均匀平面电磁波的电磁场分量和电流密度为

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-(1+j)\alpha z} \\ H_y &= \frac{E_x}{\eta_c} = H_0 e^{-(1+j)\alpha z}, \quad H_0 = \frac{E_0}{\eta_c} = E_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ J_x &= \sigma E_x = J_0 e^{-(1+j)\alpha z}, \quad J_0 = \sigma E_0 \end{aligned}$$

$H_0$  和  $J_0$  是导体表面( $z=0$ )处的磁场强度复振幅和电流密度复振幅。复坡印廷矢量(复功率流密度矢量)为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} E_x H_y^* = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (1+j)$$

在  $z > 0$  处,平均功率流密度为

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \text{Re}[\mathbf{S}] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}$$

在  $z=0$  处,平均功率流密度为

$$\mathbf{S}_{\text{av}}(z=0) = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \quad (6-37)$$

式(6-37)表示导体表面每单位面积所吸收的平均功率,也就是单位面积导体内传导电流的热损耗功率:

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma |E_0|^2 e^{-2\alpha z} dz \\ &= \frac{\sigma}{4\alpha} |E_0|^2 = \frac{1}{2} |E_0|^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \end{aligned} \quad (6-38)$$

可见,传入导体的电磁波实功率全部转化为热损耗功率。

导体表面处切向电场强度  $E_x$  与切向磁场强度  $H_y$  之比定义为导体的表面阻抗,即

$$Z_s = \left. \frac{E_x}{H_y} \right|_{z=0} = \frac{E_0}{H_0} = \eta_c = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = R_s + jX_s$$

可见,导体的表面阻抗等于其波阻抗。 $R_s$  和  $X_s$  分别称为表面电阻和表面电抗,并有

$$R_s = X_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta} = \left. \frac{l}{\sigma(\delta w)} \right|_{l=w=1}$$

这意味着,表面电阻相当于单位长度、单位宽度,而厚度为 $\delta$ 的导体块的直流电阻。参看图6-6,流过单位宽度平面导体的总电流( $z$ 由0至 $\infty$ )为

$$J_S = \int_0^{\infty} J_x dz = \int_0^{\infty} \sigma E_0 e^{-(1+j)\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0}{(1+j)\alpha} = \frac{\sigma \delta}{1+j} E_0 = H_0$$

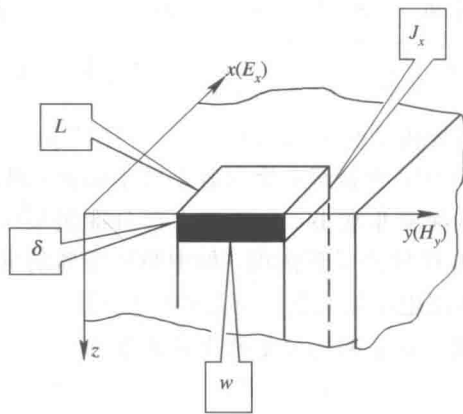


图 6-6 平面导体

从电路的观点看,此电流通过表面电阻所损耗的功率为

$$P_c = \frac{1}{2} |J_S|^2 R_S = \frac{1}{2} \frac{\sigma \delta}{2} |E_0|^2 = \frac{1}{2} |E_0|^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \quad (6-39)$$

此结果与式(6-38)和式(6-37)相同。这就是说,设想面电流 $J_S$ 均匀地集中在导体表面 $\delta$ 厚度内,此时导体的表面电阻所吸收的功率就等于电磁波垂直传入导体所耗散的热损耗功率。这样,我们可以方便地利用式(6-39)由表面电阻求得导体的损耗功率。 $R_S$ 是平面导体单位长度单位宽度上的电阻,因而也称为表面电阻率。对于有限面积的导体,用 $R_S$ 乘以长度 $L$ ,再除以宽度 $W$ 就得出其总电阻。由 $R_S$ 的表达式可见 $R_S \propto \sqrt{f}$ ,因此高频时导体的电阻远大于低频或直流时的电阻。这是由于集肤效应使高频电流在导体上所流过的截面积减少,从而使电阻增大。

**例 6-2** 海水的电磁参数是 $\epsilon_r=81$ ,  $\mu_r=1$ ,  $\sigma=4 \text{ S/m}$ , 频率为 $3 \text{ kHz}$ 和 $30 \text{ MHz}$ 的电磁波在紧切海平面下侧处的电场强度为 $1 \text{ V/m}$ , 求:

- (1) 电场强度衰减为 $1 \mu\text{V/m}$ 处的深度, 应选择哪个频率进行潜水艇的水下通信;
- (2) 计算频率 $3 \text{ kHz}$ 的电磁波从海平面下侧向海水中传播的平均功率流密度。

**解:** (1)  $f=3 \text{ kHz}$ 时: 因为 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{4 \times 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 3 \times 10^3 \times 80} \gg 1$ , 所以海水对以此频率传播的电磁波呈现为良导体, 故

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 3 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4}{2}} = 0.218$$

$$l = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{|E_0|}{|E|} = \frac{1}{\alpha} \ln 10^6 = \frac{13.8}{\alpha} = 63.3 \text{ m}$$

$f=30 \text{ MHz}$ 时: 因为 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{4 \times 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 3 \times 10^7 \times 80} = 30$ , 所以海水对以此频率传播的电磁波呈现为

不良导体, 故

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)} = 2\pi \times 3 \times 10^6 \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 80}{2 \times 36\pi \times 10^9} \times 29} = 21.4$$

$$l = \frac{13.8}{\alpha} = 0.645 \text{ m}$$

由此可见,选高频 30 MHz 的电磁波衰减较大,应采用低频 3 kHz 的电磁波。在具体的工程应用中,具体低频电磁波频率的选择还要全面考虑其它因素。

(2) 平均功率密度为

$$|S_{av}| = P_s = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} = \frac{\sigma}{4\alpha} E_0^2 = \frac{4}{4 \times 0.218} \approx 4.6 \text{ W/m}^2$$

**例 6-3** 微波炉利用磁控管输出的 2.45 GHz 的微波加热食品。在该频率上,牛排的等效复介电常数  $\epsilon' = 40\epsilon_0$ ,  $\tan\delta_e = 0.3$ , 求:

(1) 微波传入牛排的集肤深度  $\delta$ , 在牛排内 8 mm 处的微波场强是表面处的百分之几;

(2) 微波炉中盛牛排的盘子是用发泡聚苯乙烯制成的,其等效复介电常数和损耗角正切为  $\epsilon' = 1.03\epsilon_0$ ,  $\tan\delta_e = 0.3 \times 10^{-4}$ 。说明为何用微波加热时牛排被烧熟而盘子并没有被烧毁。

**解:** (1) 根据牛排的损耗角正切知,牛排为不良导体,因此由式(6-29a)得

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]}^{-1/2} = 0.0208 \text{ m} = 20.8 \text{ mm}$$

$$\frac{|E|}{|E_0|} = e^{-z/\delta} = e^{-8/20.8} = 68\%$$

可见微波加热与其它加热方法相比的一个优点是,微波能对食品内部进行加热。此外,由于微波场分布在三维空间中,所以加热均匀且快。

(2) 发泡聚苯乙烯是低耗介质,所以其集肤深度为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{2}{\omega \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)} \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 2.45 \times 10^9 \times (0.3 \times 10^{-4}) \times \sqrt{1.03}} = 1.28 \times 10^3 \text{ m}$$

可见其集肤深度很大,这意味着微波在其中传播的热损耗极小,所以盘子不会被烧毁。

**例 6-4** 证明均匀平面电磁波在良导体中传播时,每波长内场强的衰减约为 55 dB。

**证:** 良导体中衰减常数和相移常数相等。因为良导体满足条件:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

所以,相移常数等于衰减常数,即

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

设均匀平面电磁波的电场强度复矢量为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

那么  $z=\lambda$  处的电场强度振幅与  $z=0$  处的电场强度振幅比为

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}_0} \right| = e^{-\alpha z} \Big|_{z=\lambda} = e^{-\alpha \lambda} = e^{-\frac{2\pi}{\beta}} = e^{-2\pi}$$

即

$$20 \lg \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}_0} \right| \Big|_{z=\lambda} = 20 \lg e^{-2\pi} = -54.575 \text{ dB}$$

**例 6-5** 已知海水的电磁参量  $\sigma = 51 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 81$ , 作为良导体欲使 90% 以上的电磁能量(仅靠海水表面下部)进入 1 m 以下的深度, 电磁波的频率应如何选择。

**解:** 对于所给海水, 当其视为良导体时, 设其中传播的均匀平面电磁波为

$$\mathbf{E} = e_x E_0 e^{-(1+j)\alpha z}, \quad \mathbf{H} = e_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-(1+j)\alpha z}$$

式中良导体海水的波阻抗为

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1+j) = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

因此沿  $+z$  方向进入海水的平均电磁功率流密度为

$$\begin{aligned} S_{av} &= \text{Re}[S] = \text{Re} \left[ e_z \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \mu}} (1+j) \right] \\ &= e_z \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \mu}} \end{aligned}$$

故海水表面下部  $z=l$  处的平均电磁功率流密度与海水表面下部  $z=0$  处的平均电磁功率流密度之比为

$$\frac{|S_{av}|_{z=l}}{|S_{av}|_{z=0}} = e^{-2\alpha l}$$

依题意, 有

$$\frac{|S_{av}|_{z=l}}{|S_{av}|_{z=0}} = e^{-2\alpha l} = 0.9$$

考虑到良导体中衰减常数与相移常数有如下关系:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

从而有

$$f < \frac{1}{\pi \mu \sigma} \left( \frac{\ln 0.9}{-2l} \right)^2 \Big|_{l=1} = \frac{1}{\pi \cdot 4\pi \times 10^{-7} \cdot 51} \left( \frac{\ln 0.9}{-2 \times 1} \right)^2 = 13.78 \text{ Hz}$$

## 6.3 电磁波的极化

### 6.3.1 极化的概念

如前所述, 无界媒质中的均匀平面电磁波是 TEM 波。TEM 波的电场强度矢量和磁场强度矢量均在垂直于传播方向的平面内。假设电磁波沿  $+z$  方向传播, 则电场强度矢量和磁场强度矢量均在  $z=\text{常数}$  的平面内。讨论均匀平面电磁波的传播特性时, 我们假设在直角坐标系中, 电场强度矢量只有  $E_x$  分量, 因此在垂直传播方向的等相位面上, 电场强度矢

量随时间在一条直线上变化,其矢端轨迹是一条直线,这种波称为线极化波。在一般情况下,对于沿 $+z$ 方向传播的均匀平面电磁波,电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 有两个频率和传播方向均相同的两个分量 $E_x$ 和 $E_y$ 。电场强度矢量的表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y = (\mathbf{e}_x E_{0x} + \mathbf{e}_y E_{0y}) e^{-jkz} \\ &= (\mathbf{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} + \mathbf{e}_y E_{ym} e^{j\phi_y}) e^{-jkz}\end{aligned}\quad (6-40)$$

电场强度矢量的两个分量的瞬时值为

$$\begin{cases} E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{cases}\quad (6-41)$$

此时它们的合成场矢量 $\mathbf{E}$ 在等相位面上随时间变化的矢端轨迹有可能不再是一条直线。为了说明合成场矢量 $\mathbf{E}$ 在空间任一固定点上随时间的变化规律,我们引入电磁波的极化概念。

因为电场强度、磁场强度和传播方向三者之间的关系是确定的,所以一般用电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 的矢端在空间固定点上随时间的变化所描绘的轨迹来表示电磁波的极化。因此,所谓极化是指空间任一固定点上电磁波的电场强度矢量的空间取向随时间变化的方式,以 $\mathbf{E}$ 的矢端轨迹来描述。如果 $\mathbf{E}$ 的矢端轨迹是直线,电磁波称为线极化波; $\mathbf{E}$ 的矢端轨迹是圆,电磁波称为圆极化波; $\mathbf{E}$ 的矢端轨迹是椭圆,电磁波称为椭圆极化波。显然,对于均匀平面电磁波而言,空间所有点上,电磁波的极化方式都是相同的。下面我们分析式(6-41)所示的平面电磁波的两个分量取不同振幅和相位时,平面电磁波的极化形式。

### 6.3.2 平面电磁波的极化形式

#### 1. 线极化

设 $E_x$ 和 $E_y$ 同相,即 $\phi_x = \phi_y = \phi_0$ 。为了讨论方便,在空间任取一固定点 $z=0$ ,则式(6-41)变为

$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t + \phi_0), \quad E_y = E_{ym} \cos(\omega t + \phi_0)$$

合成电磁波的电场强度矢量的模为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cos(\omega t + \phi_0)\quad (6-42)$$

合成电磁波的电场强度矢量与 $x$ 轴正向夹角 $\alpha$ 的正切为

$$\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{ym}}{E_{xm}} = \text{常数}\quad (6-43a)$$

它表明矢量 $\mathbf{E}$ 与 $x$ 轴正向夹角 $\alpha$ 保持不变,如图6-7(a)所示。合成电磁波的电场强度矢量的模随时间作正弦变化,其矢端轨迹是一条直线,故称为线极化(Linear Polarization)。

同样的方法可以证明, $\phi_x - \phi_y = \pi$ 时,合成电磁波的电场强度矢量与 $x$ 轴正向的夹角 $\alpha$ 的正切为

$$\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{ym}}{E_{xm}} = \text{常数}\quad (6-43b)$$

这时合成平面电磁波的电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 的矢端轨迹是位于二、四象限的一条直线,故也称为线极化,如图6-7(b)所示。

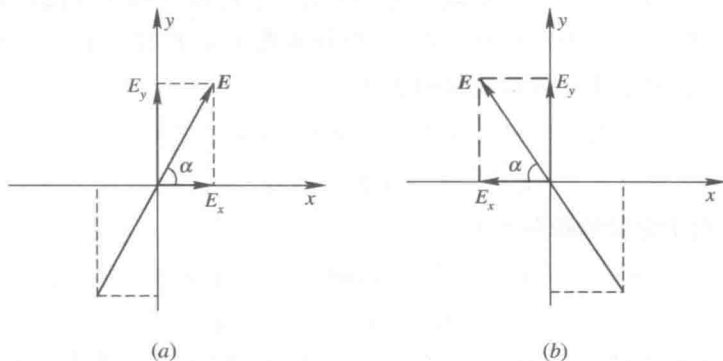


图 6-7 线极化波

## 2. 圆极化

设  $E_{xm} = E_{ym} = E_m$ ,  $\phi_x - \phi_y = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $z=0$ , 那么式(6-41)变为

$$E_x = E_m \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$E_y = E_m \cos\left(\omega t + \phi_x \mp \frac{\pi}{2}\right) = \pm E_m \sin(\omega t + \phi_x)$$

消去  $t$  得

$$\left(\frac{E_x}{E_m}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_m}\right)^2 = 1$$

此方程是圆方程。电磁波的两正交电场强度分量的合成电场强度矢量  $\mathbf{E}$  的模和幅角为

$$\begin{cases} E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m \\ \alpha = \arctan\left[\frac{\pm \sin(\omega t + \phi_x)}{\cos(\omega t + \phi_x)}\right] = \pm(\omega t + \phi_x) \end{cases} \quad (6-44)$$

可见, 电磁波的合成电场强度矢量的大小不随时间变化, 而其与  $x$  轴正向夹角  $\alpha$  将随时间变化。因此合成电场强度矢量的矢端轨迹为圆, 故称为圆极化(Circular Polarization)。

如果  $\alpha = +(\omega t + \phi_x)$ , 则矢量  $\mathbf{E}$  将以角频率  $\omega$  在  $xoy$  平面上沿逆时针方向作等角速旋转; 如果  $\alpha = -(\omega t + \phi_x)$ , 则矢量  $\mathbf{E}$  将以角频率  $\omega$  在  $xoy$  平面上沿顺时针方向作等角速旋转。所以圆极化波有左旋和右旋之分, 规定如下: 将大拇指指向电磁波的传播方向, 其余四指指向电场强度矢量  $\mathbf{E}$  的矢端的旋转方向, 符合右手螺旋关系的称为右旋圆极化波; 符合左手螺旋关系的称为左旋圆极化波, 如图 6-8 所示。

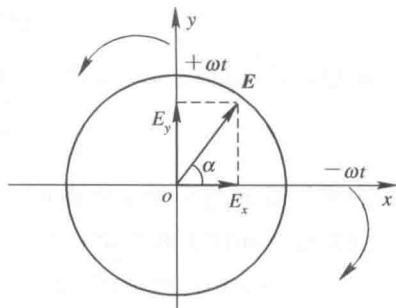


图 6-8 圆极化波

应该指出, 一般情况下,  $\alpha = \pm(\omega t + \phi_x - kz)$ 。所以如果在固定时刻, 观察合成电场强度矢量的矢端轨迹沿传播方向随空间坐标  $z$  变化, 那么它的大小和方向在垂直于传播方向平面上的投影与固定空间坐标  $z$  的矢端轨迹随时间  $t$  变化的方式相同, 但是两者的旋向相反。

### 3. 椭圆极化

更一般的情况是  $E_x$  和  $E_y$  及  $\phi_x$  和  $\phi_y$  之间为任意关系。在  $z=0$  处, 消去式(6-41)中的  $t$ , 得

$$\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{xm}}\frac{E_y}{E_{ym}}\cos\phi + \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 = \sin^2\phi \quad (6-45)$$

式中  $\phi = \phi_x - \phi_y$ 。上式是以  $E_x$  和  $E_y$  为变量的椭圆方程。因为方程中不含一次项, 故椭圆中心在直角坐标系

原点。当  $\phi = \phi_x - \phi_y = \pm\frac{\pi}{2}$  时椭圆的长短轴与坐标轴一

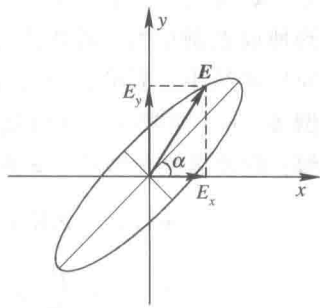


图 6-9 椭圆极化

致, 而  $\phi = \phi_x - \phi_y \neq \pm\frac{\pi}{2}$  时则不一致, 如图 6-9 所示。由图可见, 在空间固定点上, 合成电场强度矢量  $E$  不断改变其大小和方向, 其矢端轨迹为椭圆, 故称为椭圆极化(Elliptical Polarization)。显然, 线极化和圆极化可看作椭圆极化的特例。和圆极化波一样, 椭圆极化波也有左旋椭圆极化波和右旋椭圆极化波之分。由于矢量  $E$  与  $x$  轴正向夹角  $\alpha$  的关系为

$$\alpha = \arctan \frac{E_{ym} \cos(\omega t + \phi_y)}{E_{xm} \cos(\omega t + \phi_x)}$$

因此, 矢量  $E$  的旋转角速度为

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{E_{xm}E_{ym}\omega \sin(\phi_x - \phi_y)}{E_{xm}^2 \cos^2(\omega t + \phi_x) + E_{ym}^2 \cos^2(\omega t + \phi_y)}$$

可见,  $0 < \phi_x - \phi_y < \pi$  时,  $\frac{d\alpha}{dt} > 0$ , 故为右旋椭圆极化; 反之,  $-\pi < \phi_x - \phi_y < 0$  时,  $\frac{d\alpha}{dt} < 0$ , 故为左旋椭圆极化。此外, 矢量  $E$  的旋转角速度不再是常数, 而是时间的函数。

由上面的讨论可知, 平面电磁波可以是线极化波、圆极化波或椭圆极化波。无论何种极化波, 都可以用两个极化方向相互垂直的线极化波叠加而成; 反之亦然。

#### 6.3.3 电磁波极化特性的工程应用

电磁波的极化描述电磁波运动的空间性质, 因此讨论电磁波的极化有着重要的意义。一个与地面平行放置的线天线的远区场是电场强度矢量平行于地面的线极化波, 称为水平极化。例如, 电视信号的发射通常采用水平极化方式, 因此, 电视接收天线应调整到与地面平行的位置, 使电视接收天线的极化状态与入射电磁波的极化状态匹配, 以获得最佳接收效果。细心的读者也许注意到电视共用天线的架设已经应用了这个原理。相反, 一个线天线如与地面垂直放置, 其远区电场强度矢量与地面垂直, 称为垂直极化。例如, 调幅电台发射的远区电磁波的电场强度矢量是与地面垂直的垂直极化波。因此, 听众要获得最佳收听效果, 就应将收音机的天线调整到与入射电场强度矢量平行的位置, 即与地面垂直, 此时收音机天线的极化状态与入射电磁波的极化状态匹配。

很多情况下, 系统必须利用圆极化才能进行正常工作。一个线极化波可以分解为两个振幅相等、旋向相反的圆极化波, 所以, 不同取向的线极化波都可由圆极化天线收到。因此, 现代战争中都采用圆极化天线进行电子侦察和实施电子干扰。例如, 火箭等飞行器在飞行过程中, 其状态和位置在不断地改变, 因此火箭上的天线的极化状态也在不断地改

变。此时如用线极化的发射信号来遥控火箭,在某些情况下则会出现火箭上的线极化天线收不到地面控制信号,而造成失控。如改用圆极化的发射和接收,则就不会出现这种情况。卫星通信系统中,卫星上的天线和地面站的天线均采用圆极化进行工作。

**例 6-6** 证明任一线极化波总可以分解为两个振幅相等旋向相反的圆极化波的叠加。

**解:** 假设线极化波沿 $z$ 方向传播。不失一般性,取 $x$ 轴平行于电场强度矢量 $\mathbf{E}$ ,则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z) &= e_x E_0 e^{-jkz} = e_x E_0 e^{-jkz} + \frac{1}{2} j e_y E_0 e^{-jkz} - \frac{1}{2} j e_y E_0 e^{-jkz} \\ &= \frac{E_0}{2} (e_x + j e_y) e^{-jkz} + \frac{E_0}{2} (e_x - j e_y) e^{-jkz}\end{aligned}$$

上式右边第一项为一左旋圆极化波,第二项为一右旋圆极化波,而且两者振幅相等,均为 $E_0/2$ 。

**例 6-7** 判断下列平面电磁波的极化形式:

- (1)  $\mathbf{E} = E_0 (-e_x + j e_y) e^{-jkz}$ ;
- (2)  $\mathbf{E} = E_0 (j e_x - 2j e_y) e^{jkz}$ ;
- (3)  $\mathbf{E} = E_0 (e_x + 3j e_z) e^{-jkz}$ ;
- (4)  $\mathbf{E} = E_0 (3e_x + 4e_y - 5j e_z) e^{-jk(8x-6y)}$ 。

**解:** (1)  $\mathbf{E} = j E_0 (j e_x + e_y) e^{-jkz}$ ,  $E_x$  和  $E_y$  振幅相等,且  $E_x$  相位超前  $E_y$  相位  $\pi/2$ ,电磁波沿 $z$ 方向传播,故为右旋圆极化波。

(2)  $\mathbf{E} = j E_0 (e_x - 2e_y) e^{jkz}$ ,  $E_x$  和  $E_y$  相位差为  $\pi$ ,故为在二、四象限的线极化波。

(3)  $E_{zm} \neq E_{xm}$ ,  $E_z$  相位超前  $E_x$  相位  $\pi/2$ ,电磁波沿 $+y$ 方向传播,故为右旋椭圆极化波。

(4)  $\mathbf{E} = 5E_0 \left[ \left( \frac{3}{5} e_x + \frac{4}{5} e_y \right) - j e_z \right] e^{-j10k \left( \frac{4}{5} e_x - \frac{3}{5} e_y \right) \cdot \mathbf{r}} = 5E_0 (e_{xy} - j e_z) e^{-j10k e_n \cdot \mathbf{r}}$ , 在垂直于  $e_n$  的平面内将  $\mathbf{E}$  分解为  $e_{xy}$  和  $e_z$  两个方向的分量,则这两个分量互相垂直,振幅相等,且  $e_{xy}$  相位超前  $e_z$  相位  $\pi/2$ ,  $e_{xy} \times e_z = e_n$ ,故为右旋圆极化波。

**例 6-8** 电磁波在真空中传播,其电场强度矢量的复数表达式为

$$\mathbf{E} = (e_x - j e_y) 10^{-4} e^{-j20\pi z} \quad (\text{V/m})$$

试求:

- (1) 工作频率  $f$ ;
- (2) 磁场强度矢量的复数表达式;
- (3) 坡印廷矢量的瞬时值和时间平均值;
- (4) 此电磁波是何种极化,旋向如何。

**解:** (1) 真空中传播的均匀平面电磁波的电场强度矢量的复数表达式为

$$\mathbf{E} = (e_x - j e_y) 10^{-4} e^{-j20\pi z} \quad (\text{V/m})$$

所以有

$$\begin{aligned}k &= 20\pi, v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8, k = \frac{2\pi}{\lambda}, \lambda f = v \\ f &= \frac{v}{\lambda} = 3 \times 10^9 \text{ Hz}\end{aligned}$$



电场强度矢量的瞬时值为

$$\mathbf{E} = 10^{-4} [\mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - kz)]$$

(2) 磁场强度复矢量为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta_0} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E} = \frac{1}{\eta_0} (\mathbf{e}_y + j\mathbf{e}_x) 10^{-4} e^{-j20\pi z}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

磁场强度的瞬时值为

$$\mathbf{H}(z, t) = \text{Re}[\mathbf{H}(z) e^{j\omega t}] = \frac{10^{-4}}{\eta_0} [\mathbf{e}_y \cos(\omega t - kz) + \mathbf{e}_x \sin(\omega t - kz)]$$

(3) 坡印廷矢量的瞬时值和时间平均值为

$$\mathbf{S}(z, t) = \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \frac{10^{-8}}{\eta_0} [\mathbf{e}_z \cos^2(\omega t - kz) - \mathbf{e}_z \sin^2(\omega t - kz)]$$

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}(z) \times \mathbf{H}^*(z) \right] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-8}}{\eta_0} \cdot (1+1) = \frac{10^{-8}}{\eta_0} \mathbf{e}_z$$

(4) 此均匀平面电磁波的电场强度矢量在  $x$  方向和  $y$  方向的分量振幅相等, 且  $x$  方向的分量比  $y$  方向的分量相位超前  $\pi/2$ , 故为右旋圆极化波。

## 6.4 色散、相速和群速

色散的名称来源于光学。当一束阳光射在三棱镜上时, 在三棱镜的另一边就可看到红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫七色光散开的图像。这就是光谱段电磁波的色散现象。这是由于不同频率的光在同一媒质中具有不同的折射率, 也即具有不同的相速度所致。“媒质的色散”是指媒质的参数与频率有关, 而“波的色散”是指波的相速与频率有关。一个任意波形的信号总可以看成是由许多时谐波叠加而成的, 每一时谐波传播的相速由媒质参数  $\epsilon$ 、 $\mu$  和  $\sigma$  确定。若媒质的参数  $\epsilon$ 、 $\mu$  和  $\sigma$  与频率有关, 则是色散媒质, 在其中传播的电磁波必然要发生色散。要深入研究媒质的色散特性, 就必须研究媒质的原子理论和极化的微观过程。下面我们介绍由洛仑兹给出的简单的色散介质模型和由此导出的色散关系。

### 6.4.1 介质的色散

根据洛仑兹给出的色散介质模型, 一个分子由若干重离子(如原子核)和围绕它们旋转的一些轻离子(如电子)组成。在非极性分子中, 电子的电荷和原子核的电荷不仅总量相等, 而且正电荷中心与负电荷中心也重合, 因而不呈现电偶极矩。但是, 在外电场的作用下, 非极性分子的电子和核都将产生位移, 正、负电荷中心不再重合, 形成一电偶极矩。而且, 由于原子核的质量远大于电子的质量, 相对于电子的位移而言, 原子核可视为不动。由前面的分析可知, 每一个电子当对平衡位置产生一位移后, 就贡献一个电偶极矩  $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$ , 其中  $e$  是电子的电荷,  $\mathbf{r}$  是电子在外场作用下离开它平衡位置的位移。因此, 我们先来求电子的位移与频率的关系。每个电子在外场作用下所受到的作用力为

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6-46a)$$

其中  $\mathbf{v}$  是电子运动的速度。因为在时变场中, 电场强度  $\mathbf{E}$  与磁感应强度  $\mathbf{B}$  之间存在关系  $|\mathbf{B}| \propto |\mathbf{E}|/c$ , 其中  $c$  为光速, 所以洛伦兹力公式中磁场的贡献可以忽略。要严格地算出电子在电场力作用下所产生的位移是一个复杂的量子力学问题。现在我们作如下的近似处理, 即假定电子是被一个弹性恢复力

$$\mathbf{F}_1 = -m\omega_0^2 \mathbf{r} \quad (6-46b)$$

束缚在它的平衡位置上, 其中  $m$  是电子的质量,  $\omega_0$  是绕平衡点振动的振动频率。另外, 还存在阻尼力

$$\mathbf{F}_2 = -m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (6-46c)$$

其中  $\gamma$  为阻尼常数。因此, 电子在外电场作用下的运动规律满足方程

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r}\right) = e\mathbf{E} \quad (6-46d)$$

设电场为时谐场, 即  $\mathbf{E} = \text{Re}[E_m e^{j\omega t}]$ , 假定方程(6-46d)的解的形式为

$$\mathbf{r} = \text{Re}[\mathbf{r}_m e^{j\omega t}] \quad (6-46e)$$

将式(6-46e)代入式(6-46d)后, 可求得

$$\mathbf{r}_m = \frac{e}{m} \frac{E_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma} \quad (6-46f)$$

因而极化强度

$$\mathbf{P}_m = Ne\mathbf{r}_m = \frac{Ne^2}{m} \frac{E_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma} \quad (6-46g)$$

其中  $N$  为单位体积中的电子数。由于  $\mathbf{P}_m = \epsilon_0 x_e E_m$ , 所以极化率  $x_e$  为

$$x_e = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma} \quad (6-46h)$$

相对介电常数

$$\epsilon_r = 1 + x_e = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma} \quad (6-46i)$$

将其分解成实部和虚部得

$$\epsilon_r' = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (6-46j)$$

$$\epsilon_r'' = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (6-46k)$$

从复介电常数的概念可知, 相对介电常数的实部决定了波的传播速度, 而虚部决定了波的衰减特性。从式(6-46j)可以看出,  $\epsilon_r'$  与频率  $\omega$  有关, 即媒质具有色散特性。图 6-10 画出了  $\epsilon_r'$  随  $\omega$  的变化曲线。从图中可以看出, 除去在  $\omega_0$  附近很窄的一段区域内  $\epsilon_r'$  随频率升高而减小外, 在其它区域  $\epsilon_r'$  随频率升高而加大。 $\epsilon_r'$  随频率升高而增加称为正常色散,  $\epsilon_r'$  随频率升高而减小称为反常色散。因为自由原子的吸收频率  $\omega_0$  几乎全部落在紫外光谱区内, 所以从无线电的射频波谱直到紫外光谱区内, 一般媒质的折射率  $\sqrt{\epsilon_r'}$  总是大于 1 的。从图中给出的介电常数的虚部随频率的变化曲线可见, 在反常色散区介电常数的虚部很大, 它表示能量被带电离子吸收很多, 损耗很大。介电常数的虚部随频率的变化曲线称为介质的吸收曲线。

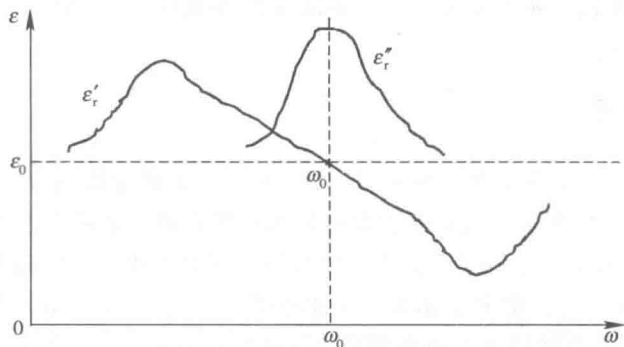


图 6-10 相对介电常数随频率的变化曲线

### 6.4.2 导体的色散

导体的色散分析可基于下述的粗糙模型。在导体的晶格上有固定的正离子，而在其周围则有运动的自由电子，它们处于平衡状态中。当有外电场作用时，可引起自由电子向外电场方向的漂移，但这种漂移受到晶格上正离子的反复碰撞和阻挡，使漂移电子的动量转移到晶格点上变成了正离子的热振动，同时电子的运动也受到了阻尼。这种阻尼作用与电子的速度成正比，用  $-mq \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  表示 ( $q$  为阻尼系数)。因此电子的平均运动满足方程：

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + mq \frac{d\mathbf{r}}{dt} = e\mathbf{E} \quad (6-46l)$$

对于时谐场  $\mathbf{E} = \text{Re}[\mathbf{E}_m e^{j\omega t}]$ ，上式的两个稳态解为

$$\mathbf{r}'_m = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}_m}{q + j\omega} \quad (6-46m)$$

$$\mathbf{r}_m = \frac{-je}{m\omega} \frac{\mathbf{E}_m}{q + j\omega} \quad (6-46n)$$

设单位体积内自由电子的总数为  $N$ ，则电流密度  $\mathbf{J}_m$  为

$$\mathbf{J}_m = Ne\mathbf{r}'_m = \frac{Ne^2}{m} \frac{\mathbf{E}_m}{q + j\omega} \quad (6-46o)$$

根据电导率的定义  $\sigma = \frac{\mathbf{J}_m}{\mathbf{E}_m}$  得

$$\sigma = \frac{Ne^2/m}{q + j\omega} \quad (6-46p)$$

由于金属原子的电子谐振频率远落在紫外光谱以外，所以导体的介电常数可以认为是  $\epsilon_0$ ，即导体复介电常数为

$$\epsilon_c = \epsilon_0 - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_0 - j \frac{Ne^2}{m\epsilon(q + j\omega)} \quad (6-46q)$$

通过分析可知，金属导体的自由电子的惯性一直到接近红外波段都可以忽略，即式 (6-46l) 中的  $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$  可以忽略，这时

$$\sigma = \frac{Ne^2}{mq} \quad (6-46r)$$

即电导率变成实数并且与频率无关。当频率高于红外波段(波长短于  $25 \times 10^{-3} \text{ cm}$ )时,电导率必须按式(6-46p)计算。

### 6.4.3 相速与群速

波的相速度只取决于媒质的参数  $\epsilon$  和  $\mu$  ( $\sigma=0$ )。对于理想媒质  $\beta=\omega \sqrt{\mu\epsilon}$ ,  $\beta$  与  $\omega$  成正比,因此相速度  $v_p$  与频率  $\omega$  无关,理想媒质是非色散媒质。如果上述条件得不到满足,则相速度  $v_p$  与频率  $\omega$  有关,这种媒质称为色散媒质。例如当频率足够高时,介电常数  $\epsilon$  是频率  $\omega$  的函数,从而使  $\beta$  为  $\omega$  的复杂函数,在这种情况下  $v_p$  与频率  $\omega$  有关,媒质成为色散媒质。另外我们知道,导电媒质也是色散媒质,导电媒质的  $\beta$  也是  $\omega$  的复杂函数,  $v_p$  与频率  $\omega$  有关。良导体中的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

这时的相速度是频率的函数。这种波的相速度随频率而变的现象就称为波的色散。

前几节讨论了以  $\cos(\omega t - \beta z)$  表示其相位变化的均匀平面电磁波,这种在时间、空间上无限延伸的单一频率的电磁波称为单色波。一个单一频率的正弦电磁波不能传递任何信息,并且理想的单频正弦电磁波实际上也是不存在的。实际工程中的电磁波在时间和空间上是有限的,它由不同频率的正弦波(谐波)叠加而成,称为非单色波。非单色波在传播过程中,由于各谐波分量的相速度不同而使其相对相位关系发生变化,从而引起波形(信号)的畸变。携带信息的都是具有一定带宽的已调制非单色波,因此调制波传播的速度才是信号传递的速度。在色散媒质中,不同频率分量的单色波各以不同的相速传播。那么,由不同频率的单色波叠加而成的电磁波信号在媒质中是以什么速度传播的呢?为了阐明此概念我们来讨论一个简单情况。假定色散媒质中同时存在着两个电场强度方向相同、振幅相同、频率不同,向  $z$  方向传播的正弦线极化电磁波,它们的角频率和相位常数分别为

$$\omega_0 + \Delta\omega \text{ 和 } \omega_0 - \Delta\omega$$

$$\beta_0 + \Delta\beta \text{ 和 } \beta_0 - \Delta\beta$$

且有

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \quad \Delta\beta \ll \beta_0$$

电场强度表达式为

$$E_1 = E_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z]$$

$$E_2 = E_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z]$$

合成电磁波的场强表达式为

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] + E_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z] \\ &= 2E_0 \cos(t\Delta\omega - z\Delta\beta) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \end{aligned} \quad (6-46s)$$

可以将上式看成角频率是  $\omega_0$ , 而振幅按  $\cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta\beta \cdot z)$  缓慢变化的向  $z$  方向传播的行波。图 6-11 表示固定时刻此合成波随  $z$  的分布(这里  $f_0 = 1 \text{ MHz}$ ,  $\Delta f = 100 \text{ kHz}$ ,  $E_0 = 1 \text{ V/m}$ ), 可见, 这是按一定周期排列的波群。随着时间的推移, 波群向正  $z$  方向运动。合成波的振幅随时间按余弦变化, 是一调幅波, 调制的频率为  $\Delta\omega$ 。这个按余弦变化的调制波称为包络波(图 6-11 中的虚线)。群速(Group Velocity)  $v_g$  的定义是包络波上某一恒定相位点推进的速度。令调制波的相位为常数:

$$t\Delta\omega - z\Delta\beta = \text{const}$$

由此得

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

当  $\Delta\omega \rightarrow 0$  时, 上式可写成

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (\text{m/s}) \quad (6-46t)$$

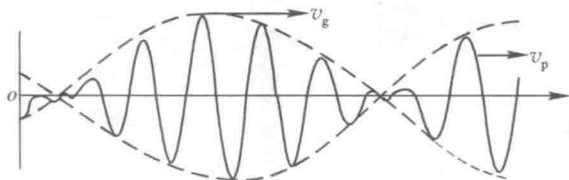


图 6-11 相速与群速

由于群速是波的包络上一个点的传播速度, 只有当包络的形状不随波的传播而变化时, 它才有意义。若信号频谱很宽, 则信号包络在传播过程中将发生畸变。因此, 只有对窄频带信号, 群速才有意义。

#### 6.4.4 群速与相速的关系

在一般情况下, 信号是由任意形状的波包(或脉冲)构成的。根据傅里叶分析可知, 对于频率为  $\omega$  的单色正弦波, 它的电场或磁场的某一分量  $\psi(t)$  可以表示成

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6-47a)$$

其中:

$$\psi_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6-47b)$$

若每一频率分量的相速是不同的, 其相移常数  $\beta(\omega)$  也是不同的(这种波称为色散波), 这样信号在传播过程中就可能发生畸变。设信号的带宽足够窄, 中心频率为  $\omega_0$ , 即

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \psi_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6-47c)$$

沿  $z$  方向传播一定距离  $z$  后, 相函数  $\psi_0(\omega)$  变成了  $\psi_z(\omega)$ , 且

$$\psi_z(\omega) = \psi_0(\omega) e^{-j\beta(\omega)z} \quad (6-47d)$$

将  $\beta(\omega)$  在  $\omega_0$  附近展开成泰勒级数并只取前两项, 得

$$\beta(\omega) \approx \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (6-47e)$$

将式(6-47e)代入式(6-47d), 并取其傅里叶逆变换, 可求得  $z$  的信号为

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \psi_0(\omega) e^{-j(k_0 z + \omega t_z)} e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \psi_0(\omega + \omega_0) e^{j\omega(t-t_z)} d\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \psi_0(\omega + \omega_0) e^{j\omega(t-t_z)} d\omega \end{aligned} \quad (6-47f)$$

包络的等相位面方程为

$$\omega(t - t_z) = \text{常数} = \omega \left( t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} z \right)$$

因此, 群速度为

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (6-47g)$$

对于非色散波, 在媒质无色散的情况下,  $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ , 而  $\epsilon$ 、 $\mu$  与频率无关, 因此

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\omega}{\beta} = v_p \quad (6-47h)$$

即群速和相速相等。

在色散媒质中, 有

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{d(v_p\beta)}{d\beta} \Big|_{\omega=\omega_0} = v_p + \beta \frac{dv_p}{d\beta} \Big|_{\omega=\omega_0} = v_p + \frac{\omega_0}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega} v_g \Big|_{\omega=\omega_0}$$

从而得

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega_0}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}} \quad (6-48)$$

可见, 当  $dv_p/d\omega=0$  时, 则  $v_g=v_p$ , 这是无色散情况, 群速等于相速。当  $dv_p/d\omega \neq 0$ , 即相速是频率的函数时,  $v_g \neq v_p$ , 这时又分两种情况:

- (1)  $\frac{dv_p}{d\omega} < 0$ , 则  $v_g < v_p$ , 这类色散称为正常色散;
- (2)  $\frac{dv_p}{d\omega} > 0$ , 则  $v_g > v_p$ , 这类色散称为非正常色散。

导体的色散就是非正常色散。这里“非正常”一词并没有特别的含义, 只是表示它与正常色散的类型不同而已。

## 6.5 均匀平面电磁波向平面分界面的垂直入射

到目前为止, 我们已经讨论了均匀平面电磁波在无界简单媒质中的传播规律。但是, 实际上媒质只占据有限的区域, 因此必须考虑电磁波传播途径上不同媒质分界面的效应。为分析方便, 仅考虑不同媒质分界面为无限大平面的情况。一般地说, 电磁波在传播过程中遇到两种不同波阻抗的媒质分界面时, 在媒质分界面上将有一部分电磁能量被反射回来, 形成反射波; 另一部分电磁能量可能透过分界面继续传播, 形成透射波。

下面几节, 我们将要研究的问题是在已知入射波的频率、振幅、极化、传播方向和两种媒质特性的条件下, 确定反射波和透射波, 进而研究不同媒质中合成电磁波的传播规律和特性。任意极化的入射波总可以分解为两个相互垂直的线极化波, 所以, 我们只讨论线极化均匀平面电磁波向无限大不同媒质分界面垂直入射和斜入射时的反射和透射问题。

### 6.5.1 平面电磁波向理想导体的垂直入射

我们从较简单的垂直入射开始研究平面电磁波的反射和透射。如图 6-12 所示, I 区

为无耗媒质, II 为理想导体, 它们具有无限大的平面分界面 ( $z=0$  的无限大平面)。设均匀平面电磁波沿  $e_z$  方向垂直投射到分界面上。

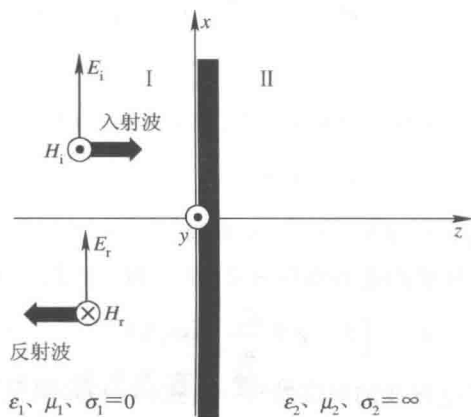


图 6-12 垂直入射到理想导体上的平面电磁波

设入射电磁波的电场和磁场分别依次为

$$\mathbf{E}_i = e_x E_{i0} e^{-jk_1 z} \quad (6-49a)$$

$$\mathbf{H}_i = e_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} e^{-jk_1 z} \quad (6-49b)$$

式中:  $E_{i0}$  为  $z=0$  处入射波 (Incident Wave) 的振幅;  $k_1$  和  $\eta_1$  为媒质 1 的相位常数和波阻抗, 且有

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

媒质 2 为理想导体, 其中的电场和磁场均为零, 即  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$  和  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{0}$ 。因此, 电磁波不能透过理想导体表面, 而是被分界面全部反射后, 在媒质 1 中形成反射波  $\mathbf{E}_r$  和  $\mathbf{H}_r$ 。为使分界面上的切向边界条件在分界面上任意点、任何时刻均可能满足, 设反射与入射波有相同的频率和极化, 且沿  $-e_z$  方向传播。于是反射波 (Reflected Wave) 的电场和磁场可分别写为

$$\mathbf{E}_r = e_x E_{r0} e^{jk_1 z} \quad (6-50a)$$

$$\mathbf{H}_r = -e_y \frac{1}{\eta_1} E_{r0} e^{jk_1 z} \quad (6-50b)$$

式中,  $E_{r0}$  为  $z=0$  处反射波的振幅。

媒质 1 中总的合成电磁场为

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = e_x (E_{i0} e^{-jk_1 z} + E_{r0} e^{jk_1 z}) \quad (6-51a)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = e_y \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} e^{-jk_1 z} - E_{r0} e^{jk_1 z}) \quad (6-51b)$$

分界面  $z=0$  两侧, 电场强度  $\mathbf{E}$  的切向分量连续, 即  $e_z \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ , 所以

$$\mathbf{E}_1(0) = e_x (E_{i0} + E_{r0}) = \mathbf{E}_2(0) = \mathbf{0}$$

于是分界面上的反射系数  $\Gamma$ , 即分界面上反射波电场强度与入射波电场强度之比为

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = -1 \quad (6-52)$$

将式(6-52)代入式(6-51),得到I区的合成电场和磁场:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_{i0} (e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}) = -\mathbf{e}_x 2j E_{i0} \sin k_1 z \quad (6-53a)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} (e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z}) = \mathbf{e}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos k_1 z \quad (6-53b)$$

它们对应的瞬时值为

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_1 e^{j\omega t}] = \mathbf{e}_x 2 E_{i0} \sin k_1 z \sin \omega t \quad (6-54a)$$

$$\mathbf{H}_1(z, t) = \text{Re}[\mathbf{H}_1 e^{j\omega t}] = \mathbf{e}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos k_1 z \cos \omega t \quad (6-54b)$$

由于II区中无电磁场,在理想导体表面两侧的磁场切向分量不连续,因此分界面上存在面电流。根据磁场切向分量的边界条件  $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s$ , 得面电流密度为

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_z \times \left( 0 - \mathbf{e}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos k_1 z \right) \Big|_{z=0} = \mathbf{e}_x 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1}$$

下面讨论I区中合成电磁波的时空特性。由式(6-54)可见,在任意时刻  $t$ , I区的合成电场  $\mathbf{E}_1$  和磁场  $\mathbf{H}_1$  都在距理想导体表面的某些固定位置处存在零值和最大值:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_1(z, t) \text{ 等于 } 0 \text{ 的值} \\ \mathbf{H}_1(z, t) \text{ 的最大值} \end{array} \right\} \text{ 发生在 } k_1 z = -n\pi \text{ 或 } z = -n \cdot \frac{\lambda}{2} (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{H}_1(z, t) \text{ 等于 } 0 \text{ 的值} \\ \mathbf{E}_1(z, t) \text{ 的最大值} \end{array} \right\} \text{ 发生在 } k_1 z = -(2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ 或 } z = -(2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4} (n=0, 1, 2, \dots)$$

这些最大值的位置不随时间变化,称为波腹点;同样这些零值的位置也不随时间变化,称为波节点。这可用图6-13来说明。图中电场强度振幅  $E_{i0}=5$ , 给出了时间  $t$  等于  $0$ 、 $T/8$ 、 $T/4$ 、 $5T/8$ 、 $3T/4$  时,  $E_1(z, t)$  与  $z$  的关系。从图中我们看到,空间各点的电场都随时间按  $\sin \omega t$  作简谐变化,但其波腹点处电场振幅总是最大,波节点处电场总是零,而且这种状态并不随时间沿  $z$  移动。这种波腹点和波节点位置都固定不动的电磁波称为驻波。这说明两个振幅相等、传播方向相反的行波合成的结果是驻波。驻波电场波腹点和波节点都每隔  $\lambda_1/4$  交替出现,两个相邻波节点之间的距离为  $\lambda_1/2$ 。

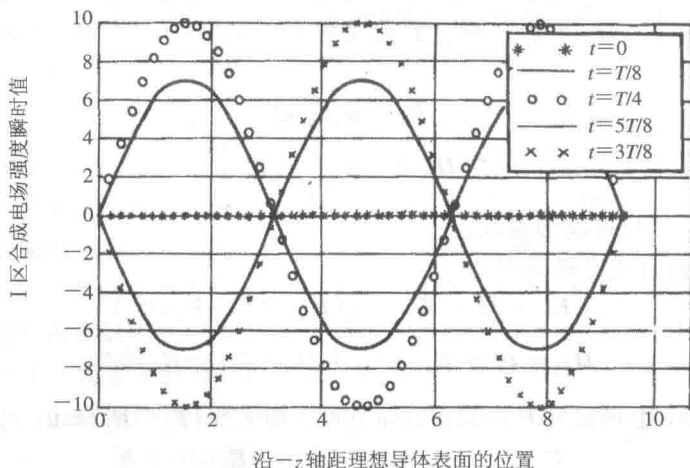


图 6-13 不同瞬间的驻波电场

由式(6-54b)知,磁场振幅也是驻波分布,但磁场的波腹点对应于电场的波节点,而



磁场的波节点对应于电场的波腹点。理想导体表面处( $z=0$ )是电场的波节点,磁场的波腹点。

驻波不传输能量,其坡印廷矢量的时间平均值为

$$\mathbf{S}_{\text{av1}} = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \right] = \text{Re} \left[ -\mathbf{e}_z \mathbf{j} \frac{4E_{10}^2}{2\eta_1} \sin k_1 z \cos k_1 z \right] = \mathbf{0} \quad (6-55a)$$

可见没有单向流动的实功率,而只有虚功率。由式(5-54)可得驻波的坡印廷矢量的瞬时值为

$$\mathbf{S}(z, t) = \mathbf{E}(z, t) \times \mathbf{H}(z, t) = \mathbf{e}_z \frac{E_{10}^2}{\eta_1} \sin 2k_1 z \sin 2\omega t \quad (6-55b)$$

此式表明,瞬时功率流随时间按周期变化,但是仅在两个波节点之间进行电场能量和磁场量的交换,并不发生电磁能量的单向传输。

### 6.5.2 平面电磁波向理想介质的垂直入射

设区域Ⅰ和区域Ⅱ中的媒质都是理想介质,则当 $x$ 方向极化、沿 $z$ 轴正向传播的均匀平面电磁波由区域Ⅰ向无限大分界面( $z=0$ )垂直入射时,因媒质参数不同(波阻抗不连续),到达分界面上的一部分入射波被分界面反射,形成沿 $z$ 轴负向传播的反射波;另一部分入射波透过分界面进入区域Ⅱ进行传播,形成沿 $z$ 轴正向传播的透射波(Transmitted Wave)。由于分界面两侧电场强度的切向分量连续,因此反射波和透射波的电场强度矢量也只有 $x$ 分量,即反射波和透射波沿 $x$ 方向极化,如图6-14所示。

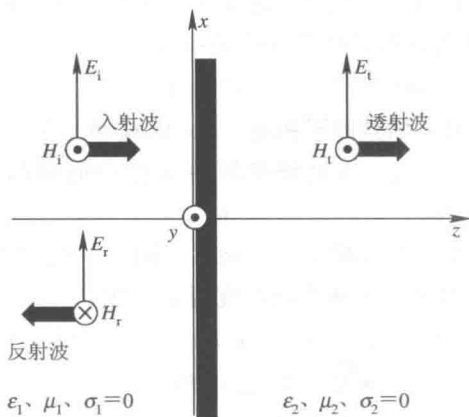


图 6-14 垂直入射到理想介质上的平面电磁波

入射波的电场和磁场表达式与式(6-49)相同,反射波的电场和磁场表达式与式(6-50)相同,区域Ⅰ中的合成电磁波的电场和磁场表达式与式(6-51)相同。区域Ⅱ中只有透射波,其电场和磁场分别为

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{e}_x E_{t0} e^{-jk_2 z} \quad (6-56a)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_2} E_{t0} e^{-jk_2 z} \quad (6-56b)$$

式中: $E_{t0}$ 为 $z=0$ 处透射波的振幅; $k_2$ 和 $\eta_2$ 为媒质2的相位常数和波阻抗,且有

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

接着利用分界面上电场和磁场所满足的边界条件  $E_{1t} = E_{2t}$  和  $H_{1t} = H_{2t}$  (理想介质的分界面上不存在传导面电流), 确定分界面处反射波振幅、透射波振幅与入射波振幅的关系。由式(6-51a)及式(6-56a), 考虑到  $z=0$  处分界面电场强度切向分量连续的边界条件  $E_{1t} = E_{2t}$ , 可得

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (6-57a)$$

由式(6-51b)及式(6-56b), 考虑到  $z=0$  处分界面磁场强度切向分量连续的边界条件  $H_{1t} = H_{2t}$ , 可得

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2}E_{t0} \quad (6-57b)$$

联立求解式(6-57)得分界面上的反射系数  $\Gamma$ ——分界面上反射波电场强度与入射波电场强度之比, 即

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (6-58a)$$

和界面上的透射系数  $T$ ——分界面上透射波电场强度与入射波电场强度之比, 即

$$T = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (6-58b)$$

由式(6-58a)和式(6-58b)知, 分界面上的透射系数  $T$  和反射系数  $\Gamma$  都是无量纲的量。反射系数  $\Gamma$  既可以为正数, 也可以为负数, 这取决于区域 I 和区域 II 的波阻抗  $\eta_1$  和  $\eta_2$ 。透射系数  $T$  始终为正数。反射系数和透射系数的关系为

$$1 + \Gamma = T \quad (6-58c)$$

如果媒质 2 为理想导体, 则其波阻抗  $\eta_2 = 0$ , 由式(6-58a)和式(6-58b)得反射系数  $\Gamma = -1$ , 透射系数  $T = 0$ 。此时, 入射波被理想导体表面全部反射, 并在媒质 1 中形成驻波。

最后, 我们讨论分界面两侧区域 I 和区域 II (非理想导体) 中合成电磁波的特性。区域 I ( $z < 0$ ) 中任意点的合成电场强度和磁场强度可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{e}_x E_{i0} (e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_x E_{i0} e^{-jk_1 z} (1 + \Gamma e^{j2k_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_x E_{i0} [(1 + \Gamma) e^{-jk_1 z} + \Gamma (e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z})] \\ &= \mathbf{e}_x E_{i0} [(1 + \Gamma) e^{-jk_1 z} + j2\Gamma \sin k_1 z] \\ &= \mathbf{e}_x E_{i0} (T e^{-jk_1 z} + j2\Gamma \sin k_1 z) \end{aligned} \quad (6-59a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} (e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} e^{-jk_1 z} (1 - \Gamma e^{j2k_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} [(1 + \Gamma) e^{-jk_1 z} - 2\Gamma \cos k_1 z] \end{aligned} \quad (6-59b)$$

从式(6-59)可以看出, 式中第一项是沿  $z$  方向传播的行波, 第二项是驻波。这种既有行波成分又有驻波成分的电磁波称为行驻波。因为有行波成分存在, 所以行驻波的电场强度和

磁场强度在离分界面的某些固定位置处的最小值不再为零,但仍然有最大值和最小值存在。根据式(6-59)知,区域 I 中电场强度和磁场强度的模为(设  $E_{i0}=E_m$  为实数)

$$|\mathbf{E}_1| = E_1 = E_m(1 + \Gamma^2 \pm 2|\Gamma| \cos 2k_1 z)^{1/2} \quad (6-60a)$$

$$|\mathbf{H}_1| = H_1 = \frac{1}{\eta_1} E_m(1 + \Gamma^2 \mp 2|\Gamma| \cos 2k_1 z)^{1/2} \quad (6-60b)$$

式(6-60)是  $z$  的周期函数,周期为  $\lambda/2$ 。括号中的上、下标分别对应于  $\Gamma > 0 (\eta_2 > \eta_1)$  和  $\Gamma < 0 (\eta_2 < \eta_1)$ 。

(1)  $\Gamma > 0 (\eta_2 > \eta_1)$ 。当

$$2k_1 z = -2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$z = -n \cdot \frac{\lambda_1}{2}$$

时,有

$$E_1 = E_{\max} = E_m(1 + |\Gamma|) \quad (6-61a)$$

$$H_1 = H_{\min} = \frac{1}{\eta_1} E_m(1 - |\Gamma|) \quad (6-61b)$$

即在分界面或离分界面为半波长整数倍处为电场波腹点,磁场波节点。而当

$$z = -(2n+1) \cdot \frac{\lambda_1}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

时,又有

$$E_1 = E_{\min} = E_m(1 - |\Gamma|) \quad (6-62a)$$

$$H_1 = H_{\max} = \frac{1}{\eta_1} E_m(1 + |\Gamma|) \quad (6-62b)$$

即在离分界面四分之一波长( $\lambda_1/4$ )的奇数倍处为电场波节点和磁场波腹点。

(2)  $\Gamma < 0 (\eta_2 < \eta_1)$ 。此时,电场、磁场的波腹点、波节点位置相反。即电场的波腹点对应于  $\Gamma > 0 (\eta_2 > \eta_1)$  时的电场的波节点,磁场的波腹点对应于  $\Gamma > 0 (\eta_2 > \eta_1)$  时的磁场的波节点;电场的波节点对应于  $\Gamma > 0 (\eta_2 > \eta_1)$  时的电场的波腹点,磁场的波节点对应于  $\Gamma > 0 (\eta_2 > \eta_1)$  时的磁场的波腹点。

比较式(6-60a)和式(6-60b)知,磁场强度的模和电场强度的模的最大值和最小值位置正好互换。

为了反映行驻波状态的驻波成分大小,定义行驻波电场(磁场)的最大值与最小值之比为驻波比,即 VSWR(Voltage Standing Wave Ratio),用  $\rho$  表示:

$$\rho = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (6-63)$$

因为  $\Gamma = -1 \sim 1$ , 所以  $\rho = 1 \sim \infty$ 。当  $|\Gamma| = 0$ 、 $\rho = 1$  时,为行波状态,区域 I 中无反射波,因此全部入射波功率都透入区域 II。

区域 II 中的电磁波仅有透射波,将透射系数引入式(6-56)后,其电场和磁场可以表示为

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t = \mathbf{e}_x T E_{i0} e^{-jk_2 z} \quad (6-64a)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_2} T E_{i0} e^{-jk_2 z} \quad (6-64b)$$

显然,区域 II 中的电磁波为向  $z$  方向传播的行波。

我们再来讨论电磁能量关系。区域 I 中,入射波向  $z$  方向传输的平均功率密度矢量为

$$\mathbf{S}_{\text{av},i} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^* \right] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \frac{E_{i0}^2}{\eta_1} \quad (6-65a)$$

反射波向  $-z$  方向传输的平均功率密度矢量为

$$\mathbf{S}_{\text{av},r} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}_r \times \mathbf{H}_r^* \right] = -\mathbf{e}_z \frac{1}{2} \frac{|\Gamma|^2 E_{i0}^2}{\eta_1} = -|\Gamma|^2 \mathbf{S}_{\text{av},i} \quad (6-65b)$$

区域 I 中合成场向  $z$  方向传输的平均功率密度矢量为

$$\mathbf{S}_{\text{av}1} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \right] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \frac{E_{i0}^2}{\eta_1} (1 - |\Gamma|^2) = \mathbf{S}_{\text{av},i} (1 - |\Gamma|^2) \quad (6-65c)$$

即区域 I 中向  $z$  方向传输的平均功率密度实际上等于入射波传输的功率减去反射波沿相反方向传输的功率。

区域 II 中向  $z$  方向传输的平均功率密度矢量为

$$\mathbf{S}_{\text{av}2} = \mathbf{S}_{\text{av},t} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^* \right] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2} \frac{|T|^2 E_{i0}^2}{\eta_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} |T|^2 \mathbf{S}_{\text{av},i} \quad (6-65d)$$

并且有

$$\mathbf{S}_{\text{av}1} = \mathbf{S}_{\text{av},i} (1 - |\Gamma|^2) = \frac{\eta_1}{\eta_2} |T|^2 \mathbf{S}_{\text{av},i} = \mathbf{S}_{\text{av}2} \quad (6-65e)$$

即区域 I 中的入射波功率等于区域 I 中的反射波功率和区域 II 中的透射波功率之和。这符合能量守恒定律。

必须指出,如果媒质 1 和媒质 2 为有耗媒质(例如导电媒质),只要用式(6-24)表示的等效复介电常数  $\epsilon_c$  代替实介电常数  $\epsilon$ ,本节公式同样适用。

**例 6-9** 一右旋圆极化波由空气向一理想介质平面( $z=0$ )垂直入射,坐标与图 6-14 相同,媒质的电磁参数为  $\epsilon_2=9\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1=\epsilon_0$ ,  $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ 。试求反射波、透射波的电场强度及相对平均功率密度;它们各是何种极化波。

**解:** 设入射波电场强度矢量为

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_0 e^{-jk_1 z}$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

则反射波和透射波的电场强度矢量为

$$\mathbf{E}_r = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_0 e^{jk_1 z}$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{T}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_0 e^{-jk_2 z}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = 3\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

式中反射系数和透射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.5$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0.5$$

入射波、反射波和透射波都可以看成是两个振幅相等、旋向相反、互相正交的线极化波的

合成, 每一线极化波的平均功率密度关系与式(6-65)相同, 所以相对平均功率密度为

$$\left| \frac{S_{av,r}}{S_{av,i}} \right| = |\Gamma|^2 = 0.5^2 = 25\%$$

$$\left| \frac{S_{av,t}}{S_{av,i}} \right| = 1 - |\Gamma|^2 = 1 - 0.25 = 75\%$$

因为反射系数和透射系数都是实数, 所以, 根据反射波和透射波电场强度矢量的表示式可见, 反射波是左旋圆极化波, 透射波是右旋圆极化波。

**例 6-10** 频率为  $f=300$  MHz 的线极化均匀平面电磁波, 其电场强度振幅值为  $2$  V/m, 从空气垂直入射到  $\epsilon_r=4$ 、 $\mu_r=1$  的理想介质平面上, 求:

- (1) 反射系数、透射系数、驻波比;
- (2) 入射波、反射波和透射波的电场和磁场;
- (3) 入射功率、反射功率和透射功率。

**解:** 设入射波为  $x$  方向的线极化波, 沿  $z$  方向传播, 如图 6-14 所示。

- (1) 据题意波阻抗为

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} = 60\pi$$

因此, 反射系数、透射系数和驻波比为

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{3}$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2}{3}$$

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 2$$

- (2) 入射波、反射波和透射波的电磁和磁场为

$$f = 300 \text{ MHz}$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{f} = 1 \text{ m}, \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot f} = 0.5 \text{ m}$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = 2\pi, \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 4\pi$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_x E_{i0} e^{-jk_1 z} = \mathbf{e}_x 2e^{-j2\pi z}$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{i0} e^{-jk_1 z} = \mathbf{e}_y \frac{1}{60\pi} e^{-j2\pi z}$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{e}_x \Gamma E_{i0} e^{jk_1 z} = -\mathbf{e}_x \frac{2}{3} e^{j2\pi z}$$

$$\mathbf{H}_r = -\mathbf{e}_y \frac{\Gamma E_{i0} e^{jk_1 z}}{\eta_1} = \mathbf{e}_y \frac{1}{180\pi} e^{j2\pi z}$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{e}_x T E_{i0} e^{-jk_2 z} = \mathbf{e}_x \frac{4}{3} e^{-j4\pi z}$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{e}_y \frac{T E_{i0} e^{-jk_2 z}}{\eta_2} = \mathbf{e}_y \frac{1}{45\pi} e^{-j4\pi z}$$

(3) 入射波、反射波、透射波的平均功率密度为

$$S_{av,i} = e_z \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} = e_z \frac{1}{60\pi} \quad (\text{W/m}^2)$$

$$S_{av,r} = -e_z \frac{E_{r0}^2}{2\eta_1} = -e_z \frac{|\Gamma E_{i0}|^2}{2\eta_1} = -e_z \frac{1}{540\pi} \quad (\text{W/m}^2)$$

$$S_t = e_z \frac{E_{t0}^2}{2\eta_2} = e_z \frac{|TE_{i0}|^2}{2\eta_2} = e_z \frac{2}{135\pi} \quad (\text{W/m}^2)$$

显然:

$$|S_{av,i}| - |S_{av,r}| = |S_{av,i}| (1 - |\Gamma|^2) = |S_{av,t}|$$

## 6.6 均匀平面电磁波向多层媒质分界面的垂直入射

解决许多实际问题时,常常利用电磁波在多层媒质中的反射和透射特性来实现某种特定功能。例如飞行器的外表面涂敷有耗或无耗吸波材料,使雷达发射的电磁波到达飞行器处不会产生反射波,这样雷达也就发现不了飞行器。这种不便由雷达观测到的飞行器就称为隐身飞行器,比如隐身飞机;照相机的镜头涂敷一层或多层薄膜可以降低“红眼”现象;雷达天线罩是避免雷达装置受恶劣气候影响的一种半圆形覆盖物,理论上要求这种覆盖物对回波不产生反射。要达到上述目的,关键的问题是如何选择适当的媒质材料及其厚度。

### 6.6.1 多层媒质中的电磁波及其边界条件

为简单起见,我们仅考虑只有三个媒质区域的情况,如图 6-15 所示。

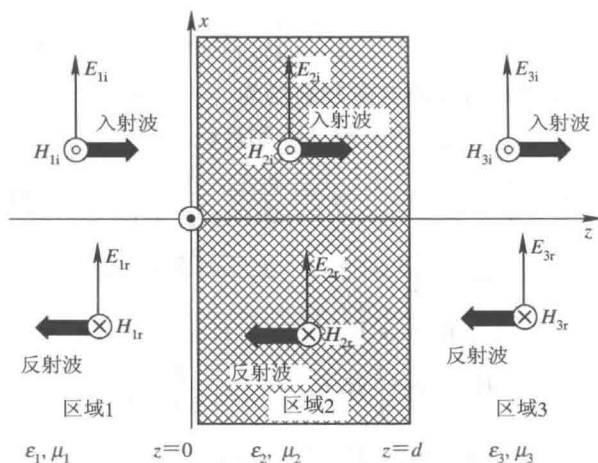


图 6-15 垂直入射到多层媒质中的均匀平面电磁波

三个区域中的媒质电磁参数分别依次为  $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2, \epsilon_3, \mu_3$ 。媒质 2 具有有限厚度,它在  $z=0$  处与媒质 1 交界,在  $z=d$  处与媒质 3 交界。现假设媒质 1 中有一  $x$  方向线极化的均匀平面电磁波沿  $+z$  轴方向传播,当此入射波到达  $z=0$  的第一个平面界面时将产生反射和透射。该透射波进入媒质 2,在媒质 2 中一部分波将在两个分界面( $z=0, z=d$ )之

间来回反射,另一部分将分别透入媒质 1 和媒质 3。透入媒质 1 的这部分波与入射波在  $z=0$  分界面上的第一次反射波的叠加为媒质 1 中的反射波;透入媒质 3 中的这一部分波为媒质 3 中的透射波。而在媒质 2 中来回反射的波,我们可以将它分为沿  $+z$  轴方向传播的波(具有传播因子  $e^{-jk_2 z}$ )和沿  $-z$  轴方向传播的波(具有传播因子  $e^{jk_2 z}$ )。一般地说,对于多层媒质,除最后一层外,每层媒质中都存在各自的人射波和反射波,最后一层则只有透射波。于是我们可以写出各个区域中的电场和磁场:

区域 1 中的人射波:

$$E_{1i} = e_x E_{1i0} e^{-jk_1 z} \quad (6-66a)$$

$$H_{1i} = e_y \frac{E_{1i0}}{\eta_1} e^{-jk_1 z} \quad (6-66b)$$

区域 1 中的反射波:

$$E_{1r} = e_x E_{1r0} e^{jk_1 z} \quad (6-67a)$$

$$H_{1r} = -e_y \frac{E_{1r0}}{\eta_1} e^{jk_1 z} \quad (6-67b)$$

区域 1 ( $z \leq 0$ ) 中的合成电磁波:

$$E_1 = E_{1i} + E_{1r} = e_x (E_{1i0} e^{-jk_1 z} + E_{1r0} e^{jk_1 z}) \quad (6-68a)$$

$$H_1 = H_{1i} + H_{1r} = e_y \frac{1}{\eta_1} (E_{1i0} e^{-jk_1 z} - E_{1r0} e^{jk_1 z}) \quad (6-68b)$$

区域 2 ( $0 \leq z \leq d$ ) 中的合成电磁波:

$$E_2 = E_{2i} + E_{2r} = e_x [E_{2i0} e^{-jk_2(z-d)} + E_{2r0} e^{jk_2(z-d)}] \quad (6-69a)$$

$$H_2 = H_{2i} + H_{2r} = e_y \frac{1}{\eta_2} [E_{2i0} e^{-jk_2(z-d)} - E_{2r0} e^{jk_2(z-d)}] \quad (6-69b)$$

区域 3 ( $z \geq d$ ) 中的合成电磁波:

$$E_3 = e_x E_{3i0} e^{-jk_3(z-d)} \quad (6-70a)$$

$$H_3 = e_y \frac{1}{\eta_3} E_{3i0} e^{-jk_3(z-d)} \quad (6-70b)$$

以上各式中,  $E_{1i0}$  是区域 1 中入射波电场的复振幅,假设是已知量。 $E_{1r0}$ 、 $E_{2i0}$ 、 $E_{2r0}$ 、 $E_{3i0}$  是四个未知量。为了求得这四个未知量,利用  $z=0$  和  $z=d$  处媒质分界面上电场和磁场的切向分量都必须连续的边界条件:

$$E_{1t} = E_{2t}, H_{1t} = H_{2t} \quad (z=0)$$

$$E_{2t} = E_{3t}, H_{2t} = H_{3t} \quad (z=d)$$

因为有四个边界条件,所以能够求四个未知量。

## 6.6.2 等效波阻抗

为了便于讨论多层媒质的反射问题,现引入等效波阻抗的概念:媒质中平行于分界面的任一平面上的总电场与总磁场之比,定义为该处的等效波阻抗  $Z(z)$ ,即

$$Z(z) = \frac{\text{总电场}}{\text{总磁场}} \quad (6-71)$$

此时我们已经假设  $x$  方向极化的均匀平面电磁波沿  $z$  方向传播。

### 1. 无界媒质中的等效波阻抗

假设无界媒质中,  $x$  方向极化的均匀平面电磁波沿  $+z$  方向传播,那么媒质中任意位

置处的等效波阻抗为

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = \frac{E_0 e^{-jkz}}{(E_0 e^{-jkz}/\eta)} = \eta$$

$x$  方向极化的均匀平面电磁波沿  $-z$  方向传播时, 等效波阻抗为

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = \frac{E_0 e^{jkz}}{(-E_0 e^{jkz}/\eta)} = -\eta$$

可见无界媒质中, 等效波阻抗在数值上等于波阻抗。

## 2. 半无界媒质中的等效波阻抗

如图 6-14 所示, 根据式(6-71)的定义, 且考虑到式(6-59), 可知媒质 1 中离平面分界面为  $z$  处的等效波阻抗为

$$Z_1(z) = \frac{E_{1x}(z)}{H_{1y}(z)} = \eta_1 \frac{e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}}{e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}} \quad (6-72a)$$

由于媒质 1 中  $z$  为负值, 因此离平面分界面( $z=0$ )的距离为  $l$  的某一位置( $z=-l$ )处的等效波阻抗为

$$Z_1(-l) = \frac{E_{1x}(-l)}{H_{1y}(-l)} = \eta_1 \frac{e^{jk_1 l} + \Gamma e^{-jk_1 l}}{e^{jk_1 l} - \Gamma e^{-jk_1 l}} \quad (6-72b)$$

将式(6-58a)定义的反射系数代入上式得

$$Z_1(-l) = \eta_1 \frac{\eta_2 \cos k_1 l + j\eta_1 \sin k_1 l}{\eta_1 \cos k_1 l + j\eta_2 \sin k_1 l} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan k_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan k_1 l} \quad (6-72c)$$

如果  $\eta_2 = \eta_1$ , 那么由式(6-72c)知:  $Z_1(-l) = \eta_1$ 。这表明空间仅存在同一种媒质, 因此没有反射波, 等效波阻抗等于媒质的波阻抗; 如果区域 2 中的媒质是理想导体, 即  $\eta_2 = 0$ ,  $\Gamma = -1$ , 那么式(6-72c)简化为

$$Z_1(-l) = j\eta_1 \tan k_1 l \quad (6-73)$$

## 3. 有界媒质中的等效波阻抗

若空间存在三层媒质, 如图 6-15 所示, 利用边界条件, 在  $z=0$  的边界上, 由式(6-68)和式(6-69)得

$$E_{1i0} + E_{1r0} = E_{2i0} e^{jk_2 d} + E_{2r0} e^{-jk_2 d} \quad (6-74a)$$

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{1i0} - E_{1r0}) = \frac{1}{\eta_2}(E_{2i0} e^{jk_2 d} - E_{2r0} e^{-jk_2 d}) \quad (6-74b)$$

在  $z=d$  的边界上, 由式(6-69)和式(6-70)得

$$E_{2i0} + E_{2r0} = E_{3i0} \quad (6-74c)$$

$$\frac{1}{\eta_2}(E_{2i0} - E_{2r0}) = \frac{1}{\eta_3}E_{3i0} \quad (6-74d)$$

联立求解式(6-74c)和式(6-74d), 得  $z=d$  分界面处的反射系数:

$$\Gamma = \frac{E_{2r0}}{E_{2i0}} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \quad (6-75)$$

联立求解式(6-74a)和式(6-74b)且考虑到式(6-75), 得  $z=0$  分界面处的反射系数:

$$\Gamma_0 = \frac{E_{1r0}}{E_{1i0}} = \frac{Z_2(0) - \eta_1}{Z_2(0) + \eta_1} \quad (6-76)$$

上式中的  $Z_2(0)$  表示区域 2 中  $z=0$  处的等效波阻抗:



$$Z_2(0) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan k_2 d}{\eta_2 + j\eta_3 \tan k_2 d} \quad (6-77)$$

比较式(6-58a)和式(6-76)可见,  $\Gamma$  与  $\Gamma_0$  的区别, 仅在于以  $Z_2(0)$  代替了  $\eta_2$ 。即对于区域 1 中的波来说, 它在  $z=0$  处遇到了媒质不连续性, 而这种媒质不连续性可以等效为在  $z=0$  处具有波阻抗为  $Z_2(0)$  的半无限大媒质。因此, 区域 1 中的入射波到达  $z=0$  的分界面时, 其反射系数为式(6-76)。换句话说, 引入等效波阻抗  $Z_2(0)$  后, 对区域 1 的入射波来说, 区域 2 和后续区域的效应相当于在  $z=0$  处接一个波阻抗为  $Z_2(0)$  的媒质。

考虑到  $z=0$  和  $z=d$  分界面处反射系数的定义, 由式(6-74a)及式(6-74c)知区域 2 和区域 3 中的入射波电场振幅为

$$E_{2i0} = \frac{1 + \Gamma_0}{1 + \Gamma e^{-j2k_2 d}} E_{1i0} e^{-jk_2 d} \quad (6-78a)$$

$$E_{3i0} = \frac{2\eta_3}{\eta_3 + \eta_2} E_{2i0} \quad (6-78b)$$

可见, 根据各个区域的媒质电磁参数计算出各分界面处的反射系数后, 用式(6-75)、式(6-76)和式(6-78)可以计算出各个区域中的合成电磁波。

### 6.6.3 媒质 1 中无反射的条件

如图 6-15 所示, 要使区域 I 的媒质 1 中没有反射波存在, 入射波能量全部透入媒质 3 (媒质 2 为无耗媒质), 那么  $z=0$  分界面处的反射系数  $\Gamma_0$  必须等于零。由式(6-76)和式(6-77)知, 此时:

$$Z_2(0) = \eta_1 = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos k_2 d + j\eta_2 \sin k_2 d}{\eta_2 \cos k_2 d + j\eta_3 \sin k_2 d}$$

或

$$\eta_1 (\eta_2 \cos k_2 d + j\eta_3 \sin k_2 d) = \eta_2 (\eta_3 \cos k_2 d + j\eta_2 \sin k_2 d) \quad (6-79)$$

使上式中实部、虚部分别相等, 有

$$\eta_1 \cos k_2 d = \eta_3 \cos k_2 d \quad (6-80a)$$

和

$$\eta_1 \eta_3 \sin k_2 d = \eta_2^2 \sin k_2 d \quad (6-80b)$$

下面分两种情况讨论。

(1) 如果  $\eta_1 = \eta_3 \neq \eta_2$ , 那么要使式(6-80a)和式(6-80b)同时满足, 则要求:

$$\sin k_2 d = 0 \quad \text{或} \quad d = n \frac{\lambda_2}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-81a)$$

所以, 对于给定的工作频率, 媒质 2 的夹层厚度  $d$  为媒质 2 中半波长的整数倍时, 媒质 1 中无反射。最短夹层厚度  $d$  应为媒质 2 中的半波长。

(2) 如果  $\eta_1 \neq \eta_3$ , 那么要求:

$$\cos k_2 d = 0 \quad \text{或} \quad d = (2n+1) \frac{\lambda_2}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-81b)$$

且

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$$

所以当媒质 1 和媒质 3 的波阻抗不相等时, 若媒质 2 的波阻抗等于媒质 1 和媒质 3 的波阻

抗的几何平均值,且媒质 2 的夹层厚度  $d$  为媒质 2 中四分之一波长的奇数倍,则媒质 1 中无反射波。

**例 6-11** 为了保护天线,在天线的外面用一理想介质材料制作一天线罩。天线辐射的电磁波频率为 4 GHz,近似地看作均匀平面电磁波,此电磁波垂直入射到天线罩理想介质板上。天线罩的电磁参数为  $\epsilon_r = 2.25$ ,  $\mu_r = 1$ ,求天线罩理想介质板厚度为多少时介质板上无反射。

解: 因为

$$f = 4 \times 10^9 \text{ Hz}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 10^9} = 0.075 \text{ m}$$

所以,理想介质板中的电磁波波长为

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{0.075}{\sqrt{2.25}} = 0.05 \text{ m}$$

天线罩两侧为空气,故天线罩的最小厚度应为

$$d = \frac{\lambda}{2} = 2.5 \text{ cm}$$

## 6.7 均匀平面电磁波向平面分界面的斜入射

### 6.7.1 均匀平面电磁波向理想介质分界面的斜入射

#### 1. 相位匹配条件和斯奈尔定律

均匀平面电磁波向理想介质分界面  $z=0$  处斜入射时,将产生反射波和透射波,如图 6-16 所示。

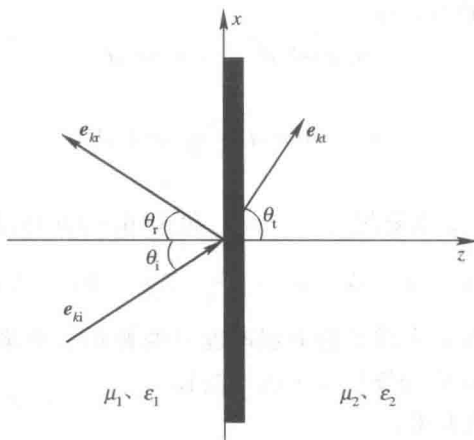


图 6-16 入射线、反射线、透射线

设入射波、反射波和透射波的传播矢量分别为

$$\begin{aligned} k_i &= e_{k_i} k_i = k_i (e_x \cos \alpha_i + e_y \cos \beta_i + e_z \cos \gamma_i) \\ &= e_x k_{ix} + e_y k_{iy} + e_z k_{iz} \end{aligned} \quad (6-82a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_r &= e_{kr} k_1 = k_1 (e_x \cos \alpha_r + e_y \cos \beta_r + e_z \cos \gamma_r) \\ &= e_x k_{rx} + e_y k_{ry} + e_z k_{rz} \end{aligned} \quad (6-82b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t &= e_{kt} k_2 = k_2 (e_x \cos \alpha_t + e_y \cos \beta_t + e_z \cos \gamma_t) \\ &= e_x k_{tx} + e_y k_{ty} + e_z k_{tz} \end{aligned} \quad (6-82c)$$

式中  $e_{ki}$ 、 $e_{kr}$ 、 $e_{kt}$  分别是入射波、反射波、透射波在传播方向上的单位矢量。由 6.1.3 节, 即向任意方向传播的均匀平面波知, 入射波、反射波、透射波的电场强度复矢量可写为

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i0} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (6-83a)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \quad (6-83b)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \quad (6-83c)$$

下面由入射波和边界条件确定反射波、透射波的传播方向。因为分界面  $z=0$  处两侧电场强度的切向分量应连续, 故有

$$E_{i0}^t e^{-j(k_{ix}x+k_{iy}y)} + E_{r0}^t e^{-j(k_{rx}x+k_{ry}y)} = E_{t0}^t e^{-j(k_{tx}x+k_{ty}y)} \quad (6-84)$$

式中上标  $t$  表示切向分量。此式对分界面上任意点都成立, 因而有

$$E_{i0}^t + E_{r0}^t = E_{t0}^t \quad (6-85a)$$

$$k_{ix}x + k_{iy}y = k_{rx}x + k_{ry}y = k_{tx}x + k_{ty}y \quad (6-85b)$$

式(6-85b)对不同的  $x$ 、 $y$  均成立, 故必有

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}, \quad k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} \quad (6-86)$$

式(6-86)表明入射波传播矢量、反射波传播矢量和透射波传播矢量沿介质分界面的切向分量相等。这一结论称为相位匹配条件。

我们把入射波的传播矢量  $e_{ki}$  与分界面的法线所构成的平面称为入射面, 即图 6-16 中  $y=0$  的平面。入射波的传播矢量  $e_{ki}$  与法线之间的夹角  $\theta_i$  称为入射角, 反射波的传播矢量  $e_{kr}$ 、透射波的传播矢量  $e_{kt}$  与法线之间的夹角  $\theta_r$  和  $\theta_t$  分别称为反射角和透射角。若取入射面为  $y=0$  的平面, 即入射线位于  $xoz$  平面内, 应用式(6-86)得

$$k_1 \cos \alpha_i = k_1 \cos \alpha_r = k_2 \cos \alpha_t \quad (6-87a)$$

$$0 = k_1 \cos \beta_r = k_2 \cos \beta_t \quad (6-87b)$$

由式(6-87b)知

$$\beta_r = \beta_t = \frac{\pi}{2}$$

上式说明反射线和透射线也位于入射面内。于是有(参看图 6-16)

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2} - \theta_i, \quad \alpha_r = \frac{\pi}{2} - \theta_r, \quad \alpha_t = \frac{\pi}{2} - \theta_t$$

将以上各式代入式(6-87a)得

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad (6-88)$$

由式(6-88)的第一等式得

$$\theta_i = \theta_r \quad (6-89)$$

此式表明入射角等于反射角, 被称为反射定律。由式(6-88)的第二等式得

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \quad (6-90)$$

对于非磁性媒质,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , 式(6-90)简化为

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \quad (6-91)$$

式中  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  称为介质的折射率。式(6-91)称为斯奈尔(Snell)折射定律。由上面的讨论可见, 已知入射波及媒质特性, 就可以确定反射波、透射波的传播方向。

## 2. 反射系数和透射系数

斜入射的均匀平面电磁波, 不论何种极化方式, 都可以分解为两个正交的线极化波: 一个极化方向与入射面垂直, 称为垂直极化波; 另一个极化方向在入射面内, 称为平行极化波, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel$$

因此, 只要分别求得这两个分量的反射波和透射波, 通过叠加, 就可以获得电场强度矢量任意取向的入射波的反射波和透射波。

### 1) 垂直极化波

取如图 6-17 所示的坐标系, 使分界面  $z=0$ , 入射面为  $xoz$  平面( $y=0$ )。

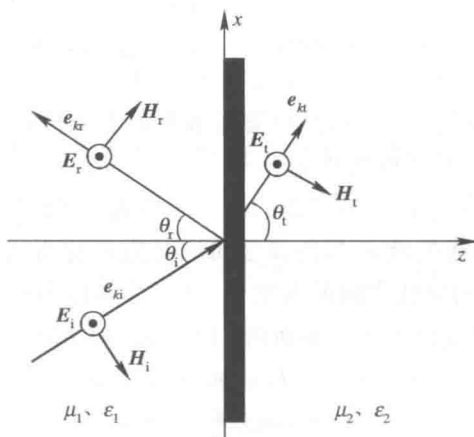


图 6-17 垂直极化的入射波、反射波和透射波

在此坐标系中, 入射波的电磁场为

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_y E_{i0} e^{-jk_1(x \sin\theta_i + z \cos\theta_i)} \quad (6-92a)$$

$$\mathbf{H}_i = (-\mathbf{e}_x \cos\theta_i + \mathbf{e}_z \sin\theta_i) \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-jk_1(x \sin\theta_i + z \cos\theta_i)} \quad (6-92b)$$

考虑到反射定律, 反射波的电磁场为

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{e}_y E_{r0} e^{-jk_1(x \sin\theta_i - z \cos\theta_i)} \quad (6-93a)$$

$$\mathbf{H}_r = (\mathbf{e}_x \cos\theta_i + \mathbf{e}_z \sin\theta_i) \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-jk_1(x \sin\theta_i - z \cos\theta_i)} \quad (6-93b)$$

透射波的电磁场为

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{e}_y E_{t0} e^{-jk_2(x \sin\theta_t + z \cos\theta_t)} \quad (6-94a)$$

$$\mathbf{H}_t = (-\mathbf{e}_x \cos\theta_t + \mathbf{e}_z \sin\theta_t) \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-jk_2(x \sin\theta_t + z \cos\theta_t)} \quad (6-94b)$$

根据分界面  $z=0$  处电场强度切向分量和磁场强度切向分量在分界面两侧必须连续的边界条件, 及式(6-92)、式(6-93)和式(6-94), 有

$$(E_{i0} + E_{r0})e^{-jk_1 x \sin\theta_i} = E_{t0}e^{-jk_2 x \sin\theta_t} \quad (6-95a)$$

$$(-E_{i0} + E_{r0})\frac{1}{\eta_1}\cos\theta_i \cdot e^{-jk_1 x \sin\theta_i} = -\frac{1}{\eta_2}\cos\theta_t \cdot E_{t0}e^{-jk_2 x \sin\theta_t} \quad (6-95b)$$

考虑到折射定律  $k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t$ , 式(6-95)简化为

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (6-96a)$$

$$(-E_{i0} + E_{r0})\frac{\cos\theta_i}{\eta_1} = -\frac{\cos\theta_t}{\eta_2}E_{t0} \quad (6-96b)$$

解之得

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \quad (6-97a)$$

$$T_{\perp} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \quad (6-97b)$$

$\Gamma_{\perp}$  和  $T_{\perp}$  分别是  $E_i$  垂直入射面时的反射系数和透射系数, 即分界面处反射波电场及透射波电场与入射波电场之比。换句话说, 此时电场只有平行于分界面的  $y$  分量, 故  $\Gamma_{\perp}$  和  $T_{\perp}$  也是电场切向分量之比。

若以  $E_{i0}$  除式(6-96a), 则有

$$1 + \Gamma_{\perp} = T_{\perp} \quad (6-98)$$

对于非磁性媒质,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , 式(6-97)简化为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \quad (6-99a)$$

$$T_{\perp} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}} \quad (6-99b)$$

上述反射系数和透射系数公式称为垂直极化波的非涅耳(A. J. Fresnel)公式。由此可见, 垂直入射时,  $\theta_i = \theta_t = 0$ , 式(6-97)简化为式(6-58)。透射系数总是正值。当  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  时, 由折射定律知,  $\theta_i < \theta_t$ , 反射系数是正值; 反之, 当  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  时, 反射系数是负值。

## 2) 平行极化波

取如图 6-18 所示的坐标系, 使分界面为  $z=0$ , 入射面为  $xoz$  平面( $y=0$ )。

此时的入射波电磁场:

$$\mathbf{E}_i = (e_x \cos\theta_i - e_z \sin\theta_i)E_{i0}e^{-jk_1(x \sin\theta_i + z \cos\theta_i)} \quad (6-100a)$$

$$\mathbf{H}_i = e_y \frac{1}{\eta_1}E_{i0}e^{-jk_1(x \sin\theta_i + z \cos\theta_i)} \quad (6-100b)$$

反射波电磁场(已经考虑了反射定律):

$$\mathbf{E}_r = -(e_x \cos\theta_i + e_z \sin\theta_i)E_{r0}e^{-jk_1(x \sin\theta_i - z \cos\theta_i)} \quad (6-101a)$$

$$\mathbf{H}_r = e_y \frac{1}{\eta_1}E_{r0}e^{-jk_1(x \sin\theta_i - z \cos\theta_i)} \quad (6-101b)$$

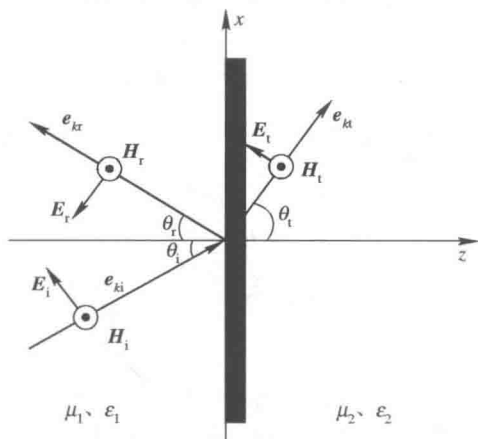


图 6-18 平行极化的入射波、反射波和透射波

透射波电磁场:

$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{e}_x \cos\theta_t - \mathbf{e}_z \sin\theta_t) E_{t0} e^{-jk_2(x \sin\theta_t + z \cos\theta_t)} \quad (6-102a)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_2} E_{t0} e^{-jk_2(x \sin\theta_t + z \cos\theta_t)} \quad (6-102b)$$

应用分界面  $z=0$  处场量的边界条件和折射定律有

$$E_{i0} \cos\theta_i - E_{r0} \cos\theta_i = E_{t0} \cos\theta_t \quad (6-103a)$$

$$\frac{1}{\eta_1} (E_{i0} + E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2} E_{t0} \quad (6-103b)$$

解之得反射系数、透射系数:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_1 \cos\theta_i - \eta_2 \cos\theta_t}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} \quad (6-104a)$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} \quad (6-104b)$$

$\Gamma_{\parallel}$  和  $T_{\parallel}$  分别是  $\mathbf{E}_i$  平行入射面时, 分界面处的反射波电场及透射电场与入射波电场之比。与  $\Gamma_{\perp}$  和  $T_{\perp}$  不同的是, 它们不等于对应电场强度切向分量之比。以  $E_{i0}$  除式(6-103b)得

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_1}{\eta_2} T_{\parallel} \quad (6-105)$$

如果  $\theta_i=0$ , 那么  $\theta_r=\theta_t=0$ , 故

$$\Gamma_{\parallel} = -\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

上式和垂直入射时导出的反射系数差一负号。这是由于对图 6-18 所示的电场正方向, 在  $\theta_i=0$  时,  $\mathbf{E}_{i0}$  和  $\mathbf{E}_{r0}$  方向相反之故。

对于非磁性媒质,  $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ , 式(6-104)简化为

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

即

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (6-106a)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

即

$$T_{\parallel} = \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad (6-106b)$$

由此可见, 透射系数  $T_{\parallel}$  总是正值, 反射系数  $\Gamma_{\parallel}$  则可正可负。

值得注意, 上述有关垂直极化和平行极化的公式有许多重要应用, 并且, 若把介电常数  $\epsilon$  换成复介电常数, 这些公式也可以推广到有耗媒质。

### 3. 媒质 1 中的合成电磁波

我们以垂直极化波为例, 讨论斜入射情况下媒质 1 中的合成电磁场。将入射波和反射波叠加, 就可以获得媒质 1 中的合成电磁波。由式(6-92)、式(6-93)和式(6-97a)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{e}_y E_{i0} [e^{-jk_1 z \cos \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1 z \cos \theta_i}] e^{-j(k_1 \sin \theta_i)x} \end{aligned} \quad (6-107a)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\eta_1} E_{i0} \left[ -\mathbf{e}_x \cos \theta_i (e^{-jk_1 z \cos \theta_i} - \Gamma_{\perp} e^{jk_1 z \cos \theta_i}) \right. \\ \left. + \mathbf{e}_z \sin \theta_i (e^{-jk_1 z \cos \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1 z \cos \theta_i}) \right] e^{-j(k_1 \sin \theta_i)x} \quad (6-107b)$$

上式中的因子  $e^{-j(k_1 \sin \theta_i)x} = e^{-jk_x x}$  表明,  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{H}_1$  是向  $x$  方向传播的行波, 相移常数为

$$k_x = k_1 \sin \theta_i$$

相速为

$$v_{px} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_1 \sin \theta_i}$$

沿  $z$  方向, 电磁场的每一分量都是传播方向相反、幅度不相等的两个行波之和, 电磁场沿  $z$  方向的分布为行驻波。它们的相移常数、相速和相应的波长为

$$k_z = k_1 \cos \theta_i, \quad v_{pz} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k_1 \cos \theta_i}, \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{k_1 \cos \theta_i}$$

由于  $\mathbf{E}_1$  仅有垂直于传播方向  $x$  的分量, 而  $\mathbf{H}_1$  有传播方向的分量  $H_x$ , 所以媒质 1 中的合成电磁场是沿  $x$  方向传播的 TE 波。

对平行极化波进行与上述类似分析知, 媒质 1 中的合成电磁波与式(6-107)所示结论相似; 沿  $x$ 、 $z$  方向的相移常数、相速和相应的波长与上述 TE 波相同。但是, 平行极化波是沿  $x$  方向传播的 TM 波。

### 6.7.2 均匀平面电磁波向理想导体的斜入射

在图 6-17 和图 6-18 中, 只要将媒质 2 看成理想导体, 我们就获得了均匀平面电磁波向理想导体斜入射的两种基本形式: 垂直极化和平行极化。理想导体的波阻抗  $\eta_2 = 0$ , 故令式(6-97)和式(6-104)中  $\eta_2 = 0$ , 有垂直极化的反射系数和透射系数:

$$\Gamma_{\perp} = -1, \quad T_{\perp} = 0 \quad (6-108a)$$

平行极化的反射系数和透射系数:

$$\Gamma_{\parallel} = 1, \quad T_{\parallel} = 0 \quad (6-108b)$$

由此可见,同垂直入射时一样,斜入射电磁波也不能透入理想导体。

### 1. 垂直极化

将式(6-108a)代入式(6-107),使得经区域2的理想导体表面反射后媒质1( $z < 0$ )中的合成电磁波:

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{e}_y 2jE_{i0} \sin[(k_1 \cos\theta_i)z] e^{-j(k_1 \sin\theta_i)x} = \mathbf{e}_y E_y \quad (6-109a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= -\frac{1}{\eta_1} 2E_{i0} \{ \mathbf{e}_x \cos\theta_i \cos[(k_1 \cos\theta_i)z] + \mathbf{e}_z j \sin\theta_i \sin[(k_1 \cos\theta_i)z] \} e^{-j(k_1 \sin\theta_i)x} \\ &= \mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_z H_z \end{aligned} \quad (6-109b)$$

可以看出,媒质1中的合成电磁波具有下列性质:

(1) 合成电磁波是沿  $x$  方向传播的 TE 波,相速为

$$v_{px} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta_i} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin\theta_i}$$

(2) 合成电磁波的振幅与  $z$  有关,所以为非均匀平面电磁波,即合成电磁波沿  $z$  方向的分布是驻波。电场强度的波节点位置离分界面( $z=0$ )的距离,可以由式(6-109a)求得

$$z = -\frac{n}{2} \frac{\lambda_1}{\cos\theta_i} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-110)$$

这也是  $\mathbf{H}_1$  的  $z$  分量  $H_z$  的波节点,  $\mathbf{H}_1$  的  $x$  分量  $H_x$  的波腹点。

如果在  $\mathbf{E}_y$ 、 $H_z$  的波节点,即  $z = -\frac{n\lambda_1}{2 \cos\theta_i}$  处,放置理想导体片,则因原来的场满足理想导体表面的边界条件—— $E_t = 0$ ,  $H_n = 0$ ,所以理想导体片的放置不会影响场分布。换句话说,在两块平行的理想导体板之间也可以存在如式(6-109)所示的 TE 波。可见,电磁波可以在理想导体限定的区域中沿导体表面传播。这时把两块理想导体板称为平行板波导,而在波导中传播的波称为导行电磁波或导波。

(3) 坡印廷矢量有两个分量。由式(6-109)可见,坡印廷矢量有  $x$ 、 $z$  两个分量,它们的时间平均值为

$$\mathbf{S}_{av,z} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{e}_y E_y \times \mathbf{e}_x H_x^* \right] = -\mathbf{e}_z 0 = 0$$

$$\mathbf{S}_{av,x} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{e}_y E_y \times \mathbf{e}_z H_z^* \right] = \mathbf{e}_x \frac{1}{2} |E_{i0}|^2 \sin\theta_i \sin^2[(k_1 \cos\theta_i)z]$$

### 2. 平行极化

若  $\mathbf{E}_i$  平行入射面斜入射到理想导体表面,类似于上面垂直极化的分析,我们获知媒质1中的合成电磁波是沿  $x$  方向传播的 TM 波,垂直理想导体表面的  $z$  方向合成电磁波仍然是驻波。

**例 6-12** 如果定义功率反射系数、功率透射系数为

$$\Gamma_p = \frac{|\mathbf{S}_{av,r} \cdot \mathbf{e}_z|}{\mathbf{S}_{av,i} \cdot \mathbf{e}_z}, \quad T_p = \frac{\mathbf{S}_{av,t} \cdot \mathbf{e}_z}{\mathbf{S}_{av,i} \cdot \mathbf{e}_z}$$



证明:

$$\Gamma_p + T_p = 1$$

即在垂直分界面的方向,入射波、反射波、透射波的平均功率密度满足能量守恒关系。

解:不论  $E_i$  垂直入射面还是平行入射面,均有

$$\begin{aligned} S_{av,i} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{i0} \times \mathbf{H}_{i0}^*] = \frac{1}{2\eta_1} \operatorname{Re}[\mathbf{E}_{i0} \times (\mathbf{e}_{ki} \times \mathbf{E}_{i0}^*)] \\ &= \frac{1}{2\eta_1} \mathbf{e}_{ki} (\mathbf{E}_{i0} \cdot \mathbf{E}_{i0}^*) \end{aligned}$$

上式中已经考虑了  $\mathbf{e}_{ki} \cdot \mathbf{E}_{i0} = 0$ 。类似地有(垂直极化和水平极化的反射系数和透射系数统一用  $\Gamma$  和  $T$  表示)

$$\begin{aligned} S_{av,r} &= \frac{1}{2\eta_1} \mathbf{e}_{kr} (\mathbf{E}_{r0} \cdot \mathbf{E}_{r0}^*) = \mathbf{e}_{kr} |\Gamma|^2 \frac{1}{2\eta_1} (\mathbf{E}_{i0} \cdot \mathbf{E}_{i0}^*) \\ S_{av,t} &= \frac{1}{2\eta_2} \mathbf{e}_{kt} (\mathbf{E}_{t0} \cdot \mathbf{E}_{t0}^*) = \mathbf{e}_{kt} |T|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{2\eta_1} (\mathbf{E}_{i0} \cdot \mathbf{E}_{i0}^*) \end{aligned}$$

将以上三式代入功率反射系数和功率透射系数的定义,并且考虑到

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ki} &= \mathbf{e}_x \sin\theta_i + \mathbf{e}_z \cos\theta_i \\ \mathbf{e}_{kr} &= \mathbf{e}_x \sin\theta_i - \mathbf{e}_z \cos\theta_i \\ \mathbf{e}_{kt} &= \mathbf{e}_x \sin\theta_t + \mathbf{e}_z \cos\theta_t \end{aligned}$$

有

$$\Gamma_p = |\Gamma|^2 \quad (6-111)$$

和

$$T_p = \frac{\eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i} |T|^2 \quad (6-112)$$

将垂直极化或平行极化的反射系数和透射系数代入式(6-111)和式(6-112),可得

$$\Gamma_p + T_p = 1$$

## 6.8 均匀平面电磁波的全透射和全反射

上一节我们分析了均匀平面电磁波向平面分界面的斜入射。由分析的结论可知,对于非磁性媒质,不论垂直极化还是平行极化的斜入射,透射系数总是正值,而反射系数既可以是正值也可以是负值。因此,如果反射系数为零,那么斜入射电磁波将全部透入媒质2;如果反射系数的模为1,那么斜入射电磁波将被分界面全部反射。下面以均匀平面电磁波自空气斜入射于聚苯乙烯( $\epsilon_r = 2.7$ ,  $\mu_r = 1$ )为例,计算垂直极化和平行极化斜入射时的功率反射系数、功率透射系数(定义参看例6-12),计算结果如图6-19所示。

由图可见,垂直极化斜入射时,功率反射系数和功率透射系数均不为零;但是,对于平行极化斜入射,当 $\theta_i = 58.68^\circ$ 时,功率反射系数为零,功率透射系数为1,故平行极化斜入射的电磁波全部透入媒质2,即垂直于分界面的人射功率全部透入媒质2;媒质1中无反射波。那么在什么条件下会产生全透射和全反射?这就是我们将来讨论的问题。

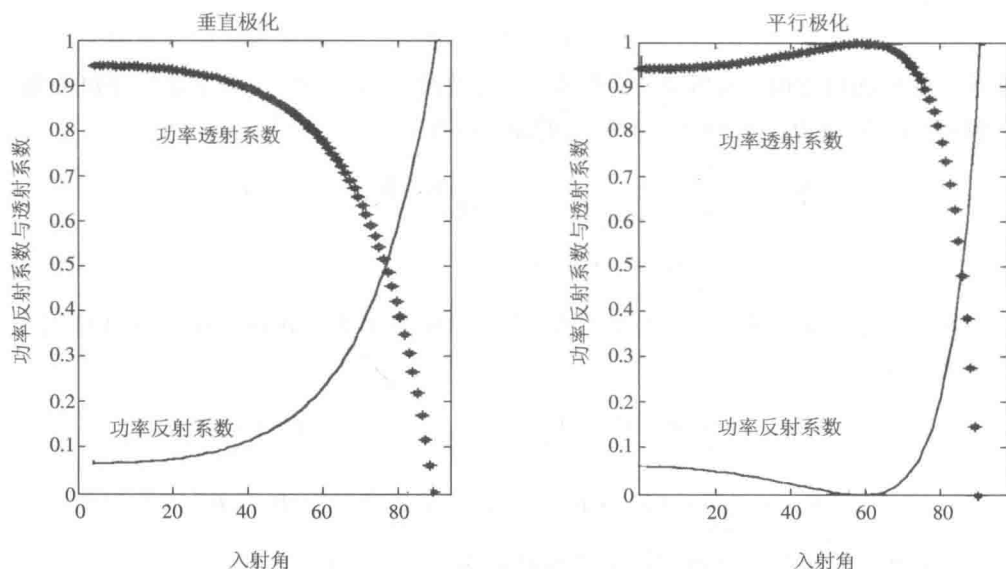


图 6-19 斜入射的功率反射系数与透射系数

### 6.8.1 全透射

由平行极化斜入射的反射系数公式(6-106a)知,要使  $\Gamma_{\parallel}=0$ , 必有

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos\theta_i = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}$$

解上式得

$$\theta_i = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}} = \theta_B \quad (6-113)$$

此角度称为布儒斯特角(Brewster Angle),记为  $\theta_B$ 。由式(6-106a)知,此时

$$\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$$

从而

$$\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_t} = \frac{\sin\theta_B}{\sin(\pi/2 - \theta_B)} = \tan\theta_B \quad \text{或} \quad \theta_B = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (6-114)$$

对于垂直极化的斜入射,其反射系数公式(6-99a)表明,  $\Gamma_{\perp}=0$  发生于

$$\cos\theta_i = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2\theta_i}$$

上式成立时要求  $\epsilon_2=\epsilon_1$ 。因此,当  $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$  时,以任何入射角向两种不同非磁性媒质分界面垂直极化斜入射,都不会发生全透射。图 6-19 也表明了这一结论。

综上所述,对于非磁性媒质,产生全透射的条件是:① 均匀平面电磁波平行极化斜入射;② 入射角等于布儒斯特角,即  $\theta_i=\theta_B$ 。所以,任意极化的电磁波以布儒斯特角斜入射到两非磁性媒质的分界面时,入射波中  $\mathbf{E}_i$  平行于入射面的部分将全部透入媒质 2,仅垂直入射面的另一部分入射波被分界面反射,故反射波是  $\mathbf{E}_i$  垂直入射面的线极化波。显然,如

果圆极化波以布儒斯特角斜入射时,其反射波为线极化波而透射波为椭圆极化波。光学中通常利用这种原理来实现极化滤波。

### 6.8.2 全反射

均匀平面电磁波斜入射时的反射系数、透射系数不仅与媒质特性有关,而且依赖于入射波的极化形式和入射角。在一定条件下会产生全反射现象。当反射系数的模 $|\Gamma|=1$ 时,功率反射系数 $\Gamma_p=|\Gamma|^2=1$ ,此时垂直于分界面的平均功率全部被反射回媒质1,这种现象称为全反射。

对于非磁性媒质,由平行极化斜入射和垂直极化斜入射的反射系数公式(6-106a)和式(6-99a)知,只要

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \sin^2 \theta_i, \quad \text{即} \quad \theta_i = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \theta_c \quad (6-115)$$

则无论是平行极化斜入射,还是垂直极化斜入射,均有 $\Gamma_{\perp}=\Gamma_{\parallel}=1$ ;并且,当入射角继续增大时,即 $\theta_c < \theta_i \leq 90^\circ$ ,反射系数成为复数而其模仍为1,即 $|\Gamma_{\perp}|=|\Gamma_{\parallel}|=1$ 。公式(6-115)所确定的角度称为临界角(Critical Angle),记为 $\theta_c$ 。值得注意,公式(6-115)成立时必然要求 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ 。

综上所述,对于非磁性媒质,斜入射的均匀平面电磁波产生全反射的条件是:①入射波自媒质1向媒质2斜入射,且 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ;②入射角等于或大于临界角,即 $\theta_c \leq \theta_i \leq 90^\circ$ 。

当 $\theta_i = \theta_c$ 时,由折射定律

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \sin \theta_i$$

知, $\theta_t = \pi/2$ ;当 $\theta_i > \theta_c$ 时,由折射定律知

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \sin \theta_i > \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \sin \theta_c = 1 \quad (6-116)$$

显然不存在 $\theta_t$ 的实数解。此时有

$$\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm j \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1} = \pm j \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \sin \theta_i \right)^2 - 1} \quad (6-117)$$

为虚数。令 $\cos \theta_t = -j\alpha$ ,则发生全反射时的反射系数与透射系数公式可重写为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i + j n_2 \alpha}{n_1 \cos \theta_i - j n_2 \alpha} \quad (6-118a)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i - j n_2 \alpha} \quad (6-118b)$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i + j n_1 \alpha}{n_2 \cos \theta_i - j n_1 \alpha} \quad (6-118c)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i - j n_1 \alpha} \quad (6-118d)$$

由上式可以看出,发生全反射后, $|\Gamma_{\perp}|=|\Gamma_{\parallel}|=1$ ;但是, $|T_{\perp}| \neq 0$ , $|T_{\parallel}| \neq 0$ ,故媒质2(透射区)中还存在透射波。这与理想导体表面的全反射是不同的。

发生全反射后,媒质2中的透射波电场强度为

$$\begin{aligned}
 E_2 &= E_t = E_{t0} e^{-jk_t \cdot r} = E_{t0} e^{-jk_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \\
 &= E_{t0} e^{-jk_2 \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right) x - j\alpha z \right]} = E_{t0} e^{-k_2 \alpha z} e^{-jk_2 \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right) x} \\
 &= E_{t0} e^{-k_2 \alpha z} e^{-j\beta x} \quad (6-119)
 \end{aligned}$$

由式(6-119)可见, 媒质 2 中的透射波是沿  $x$  方向传播的, 其振幅沿  $x$  方向不变, 而沿与之垂直的  $z$  方向衰减。因其等振幅面( $z$ =常数)与其等相位面( $x$ =常数)互相垂直, 但等相位面上波的振幅值是不均匀的, 所以这是一种非均匀平面波, 如图 6-20 所示。

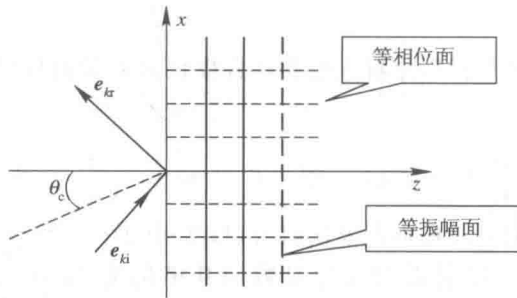


图 6-20 全反射时的透射波等相位面及等振幅面

当  $\theta_i = \theta_c$  时,  $\alpha = 0$ ; 当  $\theta_i > \theta_c$  时,  $\alpha > 0$ 。  $\theta_i$  愈大,  $k_2 \alpha$  愈大, 透射波沿  $z$  方向衰减愈快。若衰减常数  $k_2 \alpha$  足够大, 则透射波只能集中于分界面附近, 沿分界面传播, 因此把这种电磁波称为表面波。对于平行极化波, 这种表面波的电磁场分量  $E_x \neq 0$ ,  $H_x = 0$ , 沿传播方向  $x$  没有磁场分量, 称为 TM 波; 对于垂直极化波, 表面波的电磁场分量  $E_x = 0$ ,  $H_x \neq 0$ , 沿传播方向  $x$  没有电场分量, 称为 TE 波。这种表面波的相速度为

$$v_{px} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \sin \theta_i} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \sin \theta_i}$$

因全反射条件下,  $\theta_c \leq \theta_i \leq 90^\circ$ , 故

$$\frac{\omega}{k_2} > \frac{\omega}{\beta} > \frac{\omega}{k_1}$$

由上式可见, 透射波的相速度比平面波在媒质 2 中的相速度小, 而比平面波在媒质 1 中的相速度大。媒质 2 中的相速度最大时就是自由空间的光速, 因此这种透射波的相速度总小于光速, 从而也称为慢波。

发生全反射时, 媒质 2 中透射波的平均功率流密度(坡印廷矢量的时间平均值)为

$$\begin{aligned}
 S_{av,t} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_t \times H_t^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ E_{t0} e^{-k_2 \alpha z} e^{-j\beta x} \times \left( \frac{e_{kt}}{\eta_2} \times E_{t0} e^{-k_2 \alpha z} e^{-j\beta x} \right)^* \right] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ |T|^2 \frac{|E_{i0}|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 \alpha z} (e_x \sin \theta_t + e_z \cos \theta_t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ |T|^2 \frac{|E_{i0}|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 \alpha z} (e_x \sin \theta_t - e_z j\alpha) \right]
 \end{aligned}$$

可见, 媒质 2 中沿分界面法向  $z$  透射波的平均功率流密度为零, 即无实功率传输; 沿分界面切向  $x$  透射波的平均功率流密度为

$$S_{av,t} \cdot e_x = \frac{1}{2} |T|^2 \frac{|E_{i0}|^2}{\eta_2} e^{-2k_2 \alpha z} \sin \theta_t$$

媒质 2 中的透射波随  $z$  按指数衰减, 但是与欧姆损耗引起的衰减不同, 沿  $z$  方向没有能量

损耗。

必须指出,上述结论成立的前提是  $\mu_1 = \mu_2$ 。若  $\mu_1 \neq \mu_2, \epsilon_1 = \epsilon_2$  或  $\mu_1 \neq \mu_2, \epsilon_1 \neq \epsilon_2$  时,虽然也会发生全反射及全透射,但布儒斯特角及临界角的数值与上述结论数值不同,且当  $\mu_1 \neq \mu_2, \epsilon_1 = \epsilon_2$  时,只有垂直极化波才会发生全透射现象;当  $\mu_1 \neq \mu_2, \epsilon_1 \neq \epsilon_2$  时,两种极化波均会发生全透射现象。读者可以自己证明这些结论。

**例 6-13** 真空中波长为  $1.5 \mu\text{m}$  的远红外电磁波以  $75^\circ$  的入射角从  $\epsilon_r = 1.5, \mu_r = 1$  的媒质斜入射到空气中,求空气界面上的电场强度与距离空气界面一个波长处的电场强度之比。

**解:** 由式(6-115)知,临界角为

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{1}{1.5}} = 54.74^\circ$$

因为入射角大于临界角,斜入射电磁波发生全反射。

由式(6-117)和式(6-119)知:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= -j \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \cdot \sin \theta_i \right)^2 - 1} = -j 0.633 \\ k_2 \alpha &= k_2 \times 0.633 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \times 0.633 \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{E(\lambda_2)}{E(0)} = e^{-k_2 \alpha \lambda_2} = e^{-2\pi \times 0.633} = 0.0188$$

**例 6-14** 图 6-21 表示光纤(Optical Fiber)的剖面,其中光纤芯线的折射率为  $n_1$ ,包层的折射率为  $n_2$ ,且  $n_1 > n_2$ 。这里采用平面波的反、折射理论来分析光纤传输光通信信号的基本原理。设光束从折射率为  $n_0$  的媒质斜入射进入光纤,若在芯线与包层的分界面上发生全反射,则可使光束按图 6-21 所示的方式沿光纤轴向传播。现给定  $n_1$  和  $n_2$ ,试确定能在光纤中产生全反射的进入角  $\phi$ 。

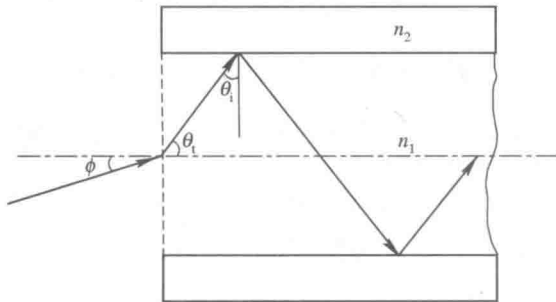


图 6-21 光纤示意图

**解:** 光纤中产生全反射的进入角  $\phi$  可由全反射条件和图 6-21 所示的各角度之间的关系求出

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \theta_t \geq \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

所以

$$\theta_i \leq \frac{\pi}{2} - \theta_c$$

由折射定律知

$$\sin\phi = \frac{n_1}{n_0} \sin\theta_i \leq \frac{n_1}{n_0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_c\right) = \frac{n_1}{n_0} \cos\theta_c = \frac{n_1}{n_0} \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^{1/2}$$

若  $n_0=1$ , 即光束从空气进入光纤, 则有

$$\sin\phi \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

假设  $n_1=1.5$ ,  $n_2=1.48$ , 则有

$$\phi \leq 14.13^\circ$$

所以在上述条件下, 只要光束进入角小于  $14.13^\circ$ , 光束即可被光纤“俘获”, 由多重全反射而在其中传播。

### 小 结

(1) 均匀平面电磁波在无界理想媒质中传播时, 电场强度矢量和磁场强度矢量的振幅不变, 它们在时间上同相, 在空间上互相垂直, 并与电磁波传播方向垂直, 三者构成右手螺旋关系。这种均匀平面电磁波可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} & \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\eta} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \quad \text{或} \quad \mathbf{E} = -\eta \mathbf{e}_k \times \mathbf{H} \\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E} &= 0 & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

式中:  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ ;  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_k = \omega \sqrt{\omega\epsilon} \mathbf{e}_k$ 。

(2) 均匀平面电磁波在导电媒质中传播时, 电场强度矢量和磁场强度矢量在空间上仍互相垂直, 且与电磁波传播方向三者构成右手螺旋关系; 但是电场和磁场的振幅按指数函数衰减, 它们在时间上不再同相。此外, 电磁波的波长变短, 相速减慢。这种电磁波可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e}_z E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_0) \\ \mathbf{H} &= \mathbf{e}_y \frac{1}{|\eta_c|} E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi_0 - \theta) \\ \eta_c &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = |\eta_c| e^{j\theta} \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \\ \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]} \end{aligned}$$

(3) 空间固定点上电磁波的电场强度矢量的空间取向随时间变化的方式称为极化方式。当构成电场强度矢量的两个相互垂直的分量的相位相同或相位相差  $180^\circ$  时, 电场强度

矢量的极化方式为线极化；当这两个相互垂直的分量的相位相差  $90^\circ$  且振幅相等时，电场强度矢量的极化方式为圆极化；当这两个相互垂直的分量的振幅和相位均为任意值时，电场强度矢量的极化方式为椭圆极化。

(4) 在正弦电磁场作用下，媒质的电磁特性通常与频率有关。这种电磁参量与频率有关的媒质称为色散媒质。电磁波的相速度随频率而变化的现象称为色散。相速度是单色波等相位面变化的速度，而群速才是电磁信号传播的速度。

(5) 平面电磁波从一种媒质入射到另一种媒质时，在分界面上一部分能量被反射回来，另一部分能量被传输进入第二种媒质。无限大平面分界面产生的反射波和透射波也是平面波。反射波和透射波场量的振幅和相位取决于分界面两侧媒质的电磁参量、入射波的极化和入射角的大小。

对于非磁性媒质，入射波自介电常数大的媒质向介电常数小的媒质入射时，若入射角大于或者等于临界角  $\theta_c$ ，则可以发生全反射。此外，对于平行极化的斜入射，也可以在某一入射角没有反射，即发生全透射，这个角称为布儒斯特角。

电磁波垂直入射到分界平面时，在分界面上发生反射，并在入射波所在区域形成合成的行驻波或驻波。

## 习 题 六

6-1 理想媒质中一平面电磁波的电场强度矢量为

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_x 5 \cos 2\pi(10^8 t - z) \quad (\text{V/m})$$

- (1) 求媒质及自由空间中的波长。
- (2) 已知媒质  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , 求媒质的  $\epsilon_r$ 。
- (3) 写出磁场强度矢量的瞬时值表达式。

6-2 电磁波在真空中传播，其电场强度矢量的复数表达式为

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) 10^{-4} e^{-j20\pi z} \quad (\text{V/m})$$

试求：

- (1) 工作频率  $f$ 。
- (2) 磁场强度矢量的复数表达式。
- (3) 坡印廷矢量的瞬时值和时间平均值。

6-3 假设真空中有一均匀平面电磁波，它的电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 4 \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) + \mathbf{e}_y 3 \cos\left(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{V/m})$$

求对应磁场强度矢量和功率流密度的时间平均值。

6-4 理想介质中，有一均匀平面电磁波沿  $z$  方向传播，其频率  $\omega = 2\pi \times 10^9 \text{ rad/m}$ 。当  $t=0$  时，在  $z=0$  处，电场强度的振幅  $E_0 = 2 \text{ mV/m}$ ，介质的  $\epsilon_r = 4$ ,  $\mu_r = 1$ 。求当  $t = 1 \mu\text{s}$  时，在  $z = 62 \text{ m}$  处的电场强度矢量、磁场强度矢量和坡印廷矢量。

6-5 已知空气中一均匀平面电磁波的磁场强度复矢量为

$$\mathbf{H} = (-\mathbf{e}_x A + \mathbf{e}_y 2\sqrt{6} + \mathbf{e}_z 4) e^{-j\pi(4x+3z)} \quad (\mu\text{A/m})$$

试求：

(1) 波长、传播方向单位矢量及传播方向与  $z$  轴的夹角。

(2) 常数  $A$ 。

(3) 电场强度复矢量。

6-6 设无界理想媒质中, 有电场强度复矢量:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_z E_{01} e^{-jkz}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_z E_{02} e^{-jkz}$$

(1) 验证  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$  是否满足  $\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ 。

(2) 由  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$  求磁场强度复矢量, 并说明  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$  是否表示电磁波。

6-7 理想媒质中平面波的电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z 100 \cos(2\pi \times 10^6 t - 2\pi \times 10^2 x) \quad (\mu\text{V/m})$$

试求:

(1) 磁感应强度。

(2) 如果媒质的  $\mu_r = 1$ , 求  $\epsilon_r$ 。

6-8 假设真空中一均匀平面电磁波的电场强度复矢量为

$$\mathbf{E} = 3(\mathbf{e}_x - \sqrt{2}\mathbf{e}_y) e^{-j\frac{\pi}{6}(2x + \sqrt{2}y - \sqrt{3}z)} \quad (\text{V/m})$$

试求:

(1) 电场强度的振幅、波矢量和波长。

(2) 电场强度矢量和磁场强度矢量的瞬时表达式。

6-9 为了抑制无线电干扰室内电子设备, 通常采用厚度为 5 个集肤深度的一层铜皮 ( $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ) 包裹该室。若要求屏蔽的频率是 10 kHz~100 MHz, 铜皮的厚度应是多少。

6-10 频率为 540 MHz 的广播信号通过一导电媒质 ( $\epsilon_r = 2.1$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.2$ ),

试求:

(1) 衰减常数和相移常数。

(2) 相速和波长。

(3) 波阻抗。

6-11 如果要求电子仪器的铝外壳 ( $\sigma = 3.54 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $\mu_r = 1$ ) 至少为 5 个集肤深度, 为防止 20 kHz~200 MHz 的无线电干扰, 铝外壳应取多厚。

6-12 在导电媒质中, 如存在自由电荷, 其密度将随时间按指数律衰减 ( $\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\epsilon}}$ )。

(1) 确定良导体中  $t$  等于周期  $T$  时, 电荷密度与初始值之比。

(2) 什么频率限上铜不能再被看作良导体。

6-13 证明椭圆极化波  $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x E_1 + j\mathbf{e}_y E_2) e^{-jkz}$  可以分解为两个不等幅的、旋向相反的圆极化波。

6-14 已知平面波的电场强度为

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_x (2 + j3) + \mathbf{e}_y 4 + \mathbf{e}_z 3] e^{j(1.8y - 2.4z)} \quad (\text{V/m})$$

试确定其传播方向和极化状态; 是否是横电磁波?

6-15 假设真空中一平面电磁波的波矢量为

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \quad (\text{rad/m})$$



其电场强度的振幅  $E_m = 3\sqrt{3}$  V/m, 极化于  $z$  轴方向。试求:

(1) 电场强度的瞬时表达式。

(2) 对应的磁场强度矢量。

6-16 真空中沿  $z$  方向传播的均匀平面电磁波的电场强度复矢量  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jkz}$ 。式中  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i$ , 且  $E_r = 2E_i = b$ ,  $b$  为实常数。又  $\mathbf{E}_r$  在  $x$  方向,  $\mathbf{E}_i$  与  $x$  轴正方向的夹角为  $60^\circ$ 。试求电场强度和磁场强度的瞬时值, 并说明波的极化形式。

6-17 证明任意一圆极化波的坡印廷矢量瞬时值是个常数。

6-18 真空中一平面电磁波的电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = \sqrt{2}(\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y)e^{-j\frac{\pi}{2}z} \quad (\text{V/m})$$

(1) 试确定此电磁波是何种极化? 旋向如何?

(2) 写出对应的磁场强度矢量。

6-19 判断下列平面电磁波的极化方式, 并指出其旋向。

(1)  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$ ;

(2)  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y 2E_0 \sin(\omega t - kz)$ ;

(3)  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{e}_y E_0 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right)$ ;

(4)  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$ 。

6-20 证明两个传播方向及频率相同的圆极化波叠加时, 若它们的旋向相同, 则合成波仍是同一旋向的圆极化波; 若它们的旋向相反, 则合成波是椭圆极化波, 其旋向与振幅大的圆极化波相同。

6-21 相速、群速和能速之间有什么关系? 群速存在的条件是什么?

6-22 空气中的电场为  $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x E_{xm} + j\mathbf{e}_y E_{ym})e^{-jkz}$  的均匀平面电磁波垂直投射到理想导体表面( $z=0$ ), 其中  $E_{xm}$ 、 $E_{ym}$  是实常数, 求反射波的极化状态及导体表面的面电流密度。

6-23 设有两种无耗非磁性媒质, 均匀平面电磁波自媒质 1 垂直投射到其界面。如果: ① 反射波电场振幅为入射波的  $1/3$ ; ② 反射波的平均功率密度的大小为入射波的  $1/3$ ; ③ 媒质 1 中合成电场的最小值为最大值的  $1/3$ , 且界面处为电场波节。试分别确定  $n_1/n_2$ 。

6-24 若以  $\mathbf{S}_{av,i}$ 、 $\mathbf{S}_{av,r}$  和  $\mathbf{S}_{av,t}$  分别表示分界面处入射波、反射波和透射波的平均功率密度, 定义垂直入射时的功率反射系数、功率透射系数(波自无耗媒质向有耗媒质垂直入射)分别依次为

$$\Gamma_p = \frac{|\mathbf{S}_{av,r}|}{|\mathbf{S}_{av,i}|}, \quad T_p = \frac{|\mathbf{S}_{av,t}|}{|\mathbf{S}_{av,i}|}$$

试证明:

$$\Gamma_p + T_p = 1$$

6-25 频率为 10 GHz 的机载雷达有一个  $\epsilon_r = 2.25$ 、 $\mu_r = 1$  的介质薄板构成的天线罩。假设其介质损耗可以忽略不计, 为它对垂直入射到其上的电磁波不产生反射, 该板应取多厚。

6-26 在  $\epsilon_{r3} = 5$ 、 $\mu_{r3} = 1$  的玻璃上涂一层薄膜以消除红外线( $\lambda_0 = 0.75 \mu\text{m}$ )的反射,

试确定介质薄膜的厚度和相对介电常数。设玻璃和薄膜可视为理想介质。

6-27 一圆极化均匀平面电磁波自介质 1 向介质 2 斜入射, 若已知  $\mu_1 = \mu_2$ :

(1) 分析  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  和  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  两种情况下反射波和透射波的极化。

(2) 当  $\epsilon_2 = 4\epsilon_1$  时, 欲使反射波为线极化波, 入射角应为多大。

6-28 一圆极化平面电磁波自折射率为 3 的介质斜入射到折射率为 1 的介质。若发生全透射且透射波为一线极化波, 求入射波的极化方向。(入射角  $\theta_i = 60^\circ$ )

6-29 均匀平面电磁波自空气入射到理想导体表面( $z=0$ )。已知入射波电场为

$$\mathbf{E}_i = 5(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \sqrt{3})e^{j6(\sqrt{3}x - z)} \quad (\text{V/m})$$

试求:

(1) 反射波电场和磁场。

(2) 理想导体表面的面电荷密度和面电流密度。

6-30 空气中沿  $\mathbf{e}_z$  方向传播的均匀平面电磁波的电场复振幅为

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}_a + j\mathbf{E}_b)e^{-jkz}$$

式中  $\mathbf{E}_a$  和  $\mathbf{E}_b$  是没有  $z$  分量的实常矢。设  $z=0$  为理想导体表面。

(1) 求反射波的电场复振幅  $\mathbf{E}_r$  和磁场复振幅  $\mathbf{H}_r$ 。

(2) 证明入射波的瞬时电场矢量  $\mathbf{E}_i(z, t)$  和瞬时磁场矢量  $\mathbf{H}_i(z, t)$  总是正交的, 反射波的瞬时电场矢量  $\mathbf{E}_r(z, t)$  和瞬时磁场矢量  $\mathbf{H}_r(z, t)$  也总是正交的。

(3) 入射波和反射波的合成波  $\mathbf{E}(z, t)$  和  $\mathbf{H}(z, t)$  也总是正交的吗?

6-31 真空中均匀平面电磁波的电场强度为

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_x(-1 + j2) + \mathbf{e}_y(-2 - j)]e^{jz}$$

(1) 此电磁波是什么极化波?

(2) 求其对应的  $\mathbf{H}$  和波长  $\lambda$ 。

6-32 均匀平面电磁波的电场为

$$\mathbf{E} = (j\mathbf{e}_x + j2\mathbf{e}_y + \sqrt{5}\mathbf{e}_z)e^{j(2x-y)}$$

此电磁波是什么极化波?

6-33 均匀平面电磁波从波阻抗为  $\eta_1$  的理想介质垂直投射到波阻抗为  $\eta_2$  的理想介质中, 证明:

(1)  $\eta_2 > \eta_1$  时, 电场驻波比  $\rho = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ 。

(2)  $\eta_1 > \eta_2$  时, 电场驻波比  $\rho = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ 。

6-34 有效值为 1 V/m 的圆极化均匀平面波, 从空气以  $\theta_i = \pi/6$  的入射角投射到  $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1$  的理想介质中, 求反射波和透射波。

6-35 对于非磁性介质, 证明  $\theta_i + \theta_B = \frac{\pi}{2}$ 。

6-36 频率  $f = 30 \text{ GHz}$  的均匀平面波从  $z < 0$  的空气中垂直投射到  $z > 0$  的介质 ( $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1$ ) 中, 求空气中的驻波比。如果要使空气中无反射波, 可在介质上覆盖另一种非磁性介质材料, 求此介质材料的介电常数  $\epsilon_r$  及其厚度。

### 综合性拓展练习题

1. 设计计算机程序, 绘制无耗、无界、无源简单媒质中的均匀平面电磁波传播的三维分布图(动态、静态均可)。
2. 设计计算机程序, 绘制良导体中均匀平面电磁波传播的三维分布图(动态、静态均可), 以及场强随集肤深度的变化规律。
3. 编制计算机程序, 动态演示电磁波的极化形式。对于均匀平面电磁波, 当两个正交线极化波的振幅与初相角满足不同条件时, 合成电磁波的电场强度矢量的模随时间变化的矢端轨迹。
4. 当一束阳光射在三棱镜上时, 在三棱镜的另一边就可看到红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫七色光散开的图像, 这就是光谱段电磁波的色散现象。研究这一现象的物理机理, 并采用合适方法表达。
5. 以常用金属体(比如, 铜、铝)为研究目标, 讨论其表面电阻, 并计算绘制电磁波(电流密度)在其中传播时的衰减值及其变化规律。
6. 编制程序, 以演示均匀平面电磁波的垂直入射(向理想导体的垂直入射, 向理想介质的垂直入射)。
7. 适于入射角度和双极化改变的低敏感材料技术研究。重点研究电磁波入射角度和极化, 以及与低敏感材料相互作用的微观机理及影响效应, 开展仿真计算及建模, 进行仿真计算与实物测量差异分析与研究, 实现在多频段/宽角度/双极化改变的先进探测条件下的良好响应效果。(① 厚度:  $\leq 7\text{ mm}$ ; ② 频响: 微波典型频段; ③ 角度响应变化率: 入射电磁波  $45^\circ$  时的材料响应, 较  $0^\circ$  时的材料响应变化率不超过  $15\%$ ; ④ 极化响应变化率: 入射电磁波 HH 或 VV 极化时, 材料对于两者的响应变化率不超过  $15\%$ ; ⑤ 外观: 平整。)
8. 当  $\mu_1 \neq \mu_2$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  时, 只有垂直极化波才会发生全透射现象。

## 第七章 电磁波的辐射

前一章我们讨论了电磁波在无界空间的传播以及电磁波在不同媒质分界面上的反、折射问题,但未考虑电磁波是如何产生的,这正是本章需要解决的课题。理论和实践都已证明,时变电磁场的能量可以脱离场源,以电磁波的形式在空间向远处传播而不再返回场源,这种现象称为电磁波的辐射。电子系统中辐射或接收电磁波的装置称为天线,它是无线电通信、导航、雷达、测控、遥感、射电天文、电子对抗及信息战等各种民用和军用系统必不可少的组成部分之一。

空间电磁波的场源是天线上的时变电流和电荷。严格地说,天线上的电流和由此电流激发的电磁场是相互作用的。天线上的电流激发电磁场,电磁场反过来作用于天线,影响天线上电流的分布,所以求解天线辐射问题本质上就是求解一个边值问题,即根据天线满足的边界条件来解麦克斯韦方程组。然而,这种方法往往在数学上遇到很大的困难,有时甚至无法求解,因此实际上都是采用近似解法:把它处理成一个分布型问题,即先近似得出天线上的场源分布,再根据场源分布(或等效场源分布)来求外场。

天线的形式可大致分为线天线与面天线两大类。前者多半是在电流元上积分来求解的,而后者则多半是求解口径绕射场的问题。

本章的主要内容有:

- 非齐次波动方程的解——滞后位
- 电基本振子的辐射场
- 对偶原理与磁基本阵子的辐射场
- 天线电参数
- 对称线天线和天线阵的概念
- 面天线的辐射场
- 互易定理

### 7.1 滞 后 位

在第五章中,我们已经引入了标量电位  $\varphi$  和磁矢位  $\mathbf{A}$ 。对于时谐场,它们与电荷源  $\rho$  和电流源  $\mathbf{J}$  之间的关系,即式(5-78)、式(5-79),重写为

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

式中  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。式(5-78)和式(5-79)称为非齐次亥姆霍兹方程。时谐场中, 电荷源  $\rho$  和电流源  $\mathbf{J}$  之间以电流连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho$$

将  $\rho$  与  $\mathbf{J}$  联系起来, 而标量电位  $\varphi$  和磁矢位  $\mathbf{A}$  之间也存在一定的关系。这一关系就是洛伦兹条件, 即式(5-77):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\varphi$$

电磁场与标量电位  $\varphi$  和磁矢位  $\mathbf{A}$  之间的关系式为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7-1)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \left[ \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{k^2} + \mathbf{A} \right] \quad (7-2)$$

可见只要解出式(5-78)中的  $\mathbf{A}$ , 即可由式(7-1)和式(7-2)求出  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$ 。

### 7.1.1 亥姆霍兹积分及辐射条件

现在让我们来解式(5-78)和式(5-79)中的磁矢位  $\mathbf{A}$  和标量电位  $\varphi$ 。由于这两个方程具有相同的形式, 所以我们只要求出一个方程的解即可。

下面我们来求式(5-79)中的标量电位  $\varphi$ 。对于式(5-78), 可以在直角坐标系中把磁矢位  $\mathbf{A}$  分解为三个分量, 得到三个与式(5-79)形式相同的标量方程, 然后直接套用标量电位  $\varphi$  的解来求得。

我们将采用格林定理

$$\int_V (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) dV = \oint_S (u \nabla w - w \nabla u) \cdot d\mathbf{S} \quad (7-3)$$

求式(5-79)中的标量电位  $\varphi$ , 并且导出辐射条件。

格林定理中的  $u$  和  $w$  是任意标量函数, 且要求  $u$  和  $w$  以及它们的一阶和二阶导数在  $V$  内连续。

容易验证标量函数

$$\Psi = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (7-4)$$

满足齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (7-5)$$

令格林定理中的  $u$  代表标量电位  $\varphi$ , 即  $u = \varphi$ ,  $\varphi$  满足式(5-79), 即

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') + k^2 \varphi(\mathbf{r}') = -\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon} \quad (7-6)$$

再令  $w = \Psi$ , 且  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , 如图 7-1 所示。 $\mathbf{r}$  是场点;  $\mathbf{r}'$  是源点, 亦即格林定理中的积分变点。

再将  $\varphi$  和  $\Psi$  代入格林定理积分时, 需暂时排除  $\Psi$  的奇点  $R=0$  ( $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ )。因为  $\Psi$  在  $P$  点不连续, 从而不满足格林定理对被积函数的要求。为此以  $P$  点为球心, 作半径为  $a$  的小球, 其表面为  $S_2$ , 体积为  $V_2$ , 如图 7-1 所示。

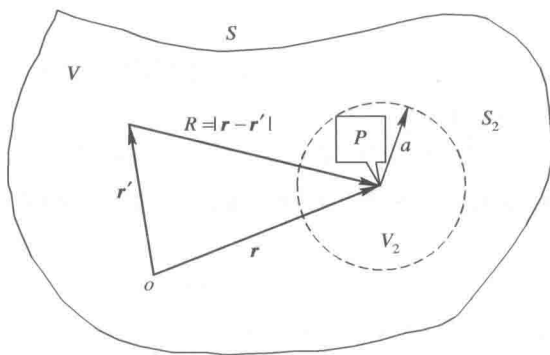


图 7-1 求解式(7-6)用图

于是, 积分在体积  $V_1 = V - V_2$  及其表面  $S_1 = S + S_2$  上进行:

$$\begin{aligned} & \int_{V_1} [\varphi(\mathbf{r}') \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}')] dV' \\ &= \oint_S \left[ \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS' + \oint_{S_2} \left[ \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS' \quad (7-7) \end{aligned}$$

在  $S_2$  上积分时, 外法线方向指向小球球心  $P$  点, 于是  $\partial/\partial n = -\partial/\partial R$ ; 面元  $dS' = a^2 d\Omega'$ ,  $d\Omega'$  是  $dS'$  对  $P$  点所张的立体角元。这样, 就有

$$\begin{aligned} & \oint_{S_2} \left[ -\varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{-jkR}}{R} + \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial R} \right]_{R=a} a^2 d\Omega' \\ &= \oint_{S_2} \left[ \varphi(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{R^2} + \frac{jk}{R} \right) e^{-jkR} + \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial R} \right]_{R=a} a^2 d\Omega' \end{aligned}$$

令  $a \rightarrow 0$ , 小球面  $S_2$  收缩成点  $P$ 。考虑到  $\partial\varphi/\partial R$  有限, 上式中的积分只剩下被积函数是  $\varphi(\mathbf{r}') \cdot e^{-jkR}/R^2$  的一项不等于零。此时小球面  $S_2$  上的  $\varphi(\mathbf{r}')$  可以用小球球心处的  $\varphi(\mathbf{r})$  代替:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \oint_{S_2} \left[ \varphi(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R^2} \right]_{R=a} a^2 d\Omega' = \varphi(\mathbf{r}) \oint_{S_2} d\Omega' = 4\pi\varphi(\mathbf{r})$$

将上式代入式(7-7), 并且在其体积积分中考虑到式(7-5)和(7-6), 得

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} e^{-jkR} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} \frac{e^{-jkR}}{R} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-jkR}}{R} \right] dS' \quad (7-8)$$

磁矢位  $\mathbf{A}$  的每个直角坐标分量均可用形如上式的积分表示, 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} e^{-jkR} dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{\partial n} \frac{e^{-jkR}}{R} - \mathbf{A}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-jkR}}{R} \right] dS' \quad (7-9) \end{aligned}$$

由此可见, 场源分布已知时, 可由式(7-8)或式(7-9)求出位函数。其中体积分是  $V$  中场源的贡献; 面积分是  $V$  外场源的贡献。上述结论首先由亥姆霍兹得出, 故称为亥姆霍兹积分。

考虑无限空间的电磁问题时, 取以  $R$  为半径的球面作为  $S$ ,  $dS' = R^2 d\Omega'$ , 式(7-8)中的面积分可以写为

$$\oint_S R \left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} + jk\varphi \right) e^{-jkR} d\Omega' + \oint_S \varphi e^{-jkR} d\Omega' \quad (7-10)$$

而要排除在无限远处的场源(设无限远处的场源为零), 就必须使上式为零。为此, 要求

$R \rightarrow \infty$  时:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R\varphi = \text{有限值} \quad (7-11a)$$

在这个限制条件下, 式(7-10)的第二项积分等于零, 即要求在远离场源处标量电位  $\varphi$  至少按  $R^{-1}$  减少; 第一项积分在满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} + jk\varphi \right) = 0 \quad (7-11b)$$

时也等于零。式(7-11b)称为辐射条件。同理对于磁矢位亦有类似条件。

### 7.1.2 滞后位

标量电位  $\varphi$  满足辐射条件式(7-11b)时, 排除无限远处的场源, 式(7-8)中的面积分一项为零, 标量电位  $\varphi(\mathbf{r})$  仅表示向外传播的电磁波, 即

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{R} dV' \quad (7-12a)$$

如果我们把  $k = \omega/v$  代入上式, 并重新引入时间因子  $e^{j\omega t}$ , 则得

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{j\omega(t - \frac{R}{v})}}{R} dV' \quad (7-12b)$$

磁矢位  $\mathbf{A}$  可分解为三个直角坐标分量, 它们的解也具有式(7-12)的类似形式。因此

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{R} dV' \quad (7-13a)$$

引入时间因子  $e^{j\omega t}$  后则有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{j\omega(t - \frac{R}{v})}}{R} dV' \quad (7-13b)$$

这就是式(5-78)的解。利用上式可求解天线电流在空间激发的电磁波。

现在我们来讨论式(7-12b)和式(7-13b)的物理含义。首先注意到, 当  $\omega = 0$  时, 式(7-12b)和式(7-13b)都分别还原到静态场的解:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

和

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

其次, 在时变场中时间因子  $e^{j\omega(t - \frac{R}{v})}$  表明, 对离开源点距离为  $R$  的场点  $P$ , 某一时刻  $t$  的标量电位  $\varphi$  和磁矢位  $\mathbf{A}$  并不是由时刻  $t$  的场源(电荷或电流)所决定的, 而是由略早时刻  $t - R/v$  的场源(电荷或电流)所决定的。换句话说, 场点位函数的变化滞后于场源的变化, 滞后的时间  $R/v$  就是电磁波传播距离  $R$  所需要的时间。基于这种位函数的滞后, 我们把式(7-12b)和式(7-13b)的标量电位  $\varphi$  和磁矢位  $\mathbf{A}$  均称为滞后位。

如果时间  $R/v$  足够小, 以至在所讨论区域内可以忽略, 即忽略传播效应, 则此区域内的场就是似稳场。电路理论正是建立在似稳场的基础上的。

## 7.2 电基本振子的辐射场

电基本振子是一段载有高频电流的短导线, 其长度远小于工作波长( $dl \ll \lambda$ ), 且导线上

各点电流的振幅相等, 相位也相同。虽然实际分布在线天线上各处的电流的大小和相位不同, 但实际天线上的电流分布可以看成是由许多首尾相连的不同电基本振子的电流分布所组成的, 因此电基本振子也称为电流元。电流元辐射场的分析计算是线天线工程计算的基础。

根据电流连续性原理, 电流元的两端必须同时积聚大小相等、符号相反的时谐电荷  $Q$ , 以使  $i(t) = \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = I_m \cos(\omega t + \phi)$  用复数表示, 则有  $Q = I / j\omega$  ( $I = I_m e^{j\phi}$ , 后面的计算中认为电流初相角  $\phi = 0$ )。为此, 其实际结构是在两端各加载一个大金属球, 如图 7-2(a) 所示。这也就是早期赫兹试验所用的形式, 所以又称为赫兹电偶极子 (Hertzian Dipole)。普通的短对称振子, 由于其两端的电流分布近于零 (相当于开路端), 沿线电流不是均匀分布的, 而是呈三角形分布, 如图 7-2(b) 所示。

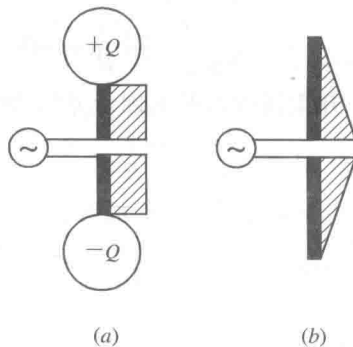


图 7-2 电流元与短对称振子

### 7.2.1 电基本振子的电磁场计算

我们采用间接法来求电基本振子的电磁场, 即先由式(7-13a)求出电基本振子的磁矢位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , 再将其代入式(7-1)确定磁感应强度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , 最后把磁感应强度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  代入麦克斯韦第一方程求出电场强度  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。设电基本振子沿  $z$  轴方向, 且置于坐标原点, 如图 7-3 所示。取短导线的长度为  $dl$ , 横截面积为  $\Delta S$ , 因为短导线仅占有一个很小的体积  $dV = dl \cdot \Delta S$ , 故有

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = \frac{I}{S} S dl \mathbf{e}_z = I dl \mathbf{e}_z \quad (7-14)$$

又由于短导线放置在坐标原点,  $dl$  很小, 因此可取  $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ , 从而有  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$ 。考虑到上述理由, 根据式(7-13a)可求出电基本振子在场点  $P$  产生的磁矢位:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{I dl \mathbf{e}_z}{R} e^{-jkR} = \mathbf{e}_z \frac{\mu}{4\pi} \frac{I dl}{r} e^{-jkr} \quad (7-15)$$

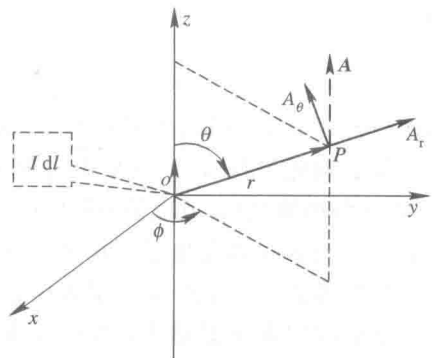


图 7-3 电基本振子

为了采用球坐标系, 我们将式(7-15)表示的磁矢位  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  进行坐标变换, 得

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\phi A_\phi = \mathbf{e}_r A_z \cos\theta - \mathbf{e}_\theta A_z \sin\theta \quad (7-16)$$



将上式代入式(7-1)可求出电基本振子在场点  $P$  产生的磁场:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_z \cos\theta & -rA_z \sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

由此可解得

$$H_r = 0 \quad (7-17a)$$

$$H_\theta = 0 \quad (7-17b)$$

$$H_\phi = \frac{k^2 I \, dl \, \sin\theta}{4\pi} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-jkr} \quad (7-17c)$$

将式(7-17)代入无源区中的麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$$

可得电场强度的三个分量:

$$E_r = \frac{2I \, dl \, k^3 \cos\theta}{4\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \quad (7-18a)$$

$$E_\theta = \frac{I \, dl \, k^3 \sin\theta}{4\pi\omega\epsilon} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] e^{-jkr} \quad (7-18b)$$

$$E_\phi = 0 \quad (7-18c)$$

由上可见,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  互相垂直,  $\mathbf{E}$  在过振子的平面(子午面)内, 而  $\mathbf{H}$  则在与赤道平面平行的平面内; 磁场强度只有一个分量  $H_\phi$ , 而电场强度有两个分量  $E_r$  和  $E_\theta$ 。无论哪个分量都随距离  $r$  的增加而减小, 只是它们的成分(不同项)有的随  $r$  减小的快, 有的则减小的慢。此外, 在源点的近区和远区, 占优势的成分是不同的。

## 7.2.2 电基本振子的电磁场分析

### 1. 近区场

当  $kr \ll 1$  时,  $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ , 即场点  $P$  与源点之间的距离  $r$  远小于波长  $\lambda$  的区域称为近区。在近区中, 有

$$\frac{1}{kr} \ll \frac{1}{(kr)^2} \ll \frac{1}{(kr)^3}, \quad e^{-jkr} \approx 1$$

故在式(7-17)和式(7-18)中, 起主要作用的是  $\frac{1}{kr}$  的高次幂项, 保留这一高次幂项得

$$E_r = -j \frac{I \, dl \, \cos\theta}{2\pi\omega\epsilon r^3} = \frac{2p}{4\pi\epsilon r^3} \cos\theta \quad (7-19a)$$

$$E_\theta = -j \frac{I \, dl \, \sin\theta}{4\pi\omega\epsilon r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \sin\theta \quad (7-19b)$$

$$H_\phi = \frac{I \, dl \, \sin\theta}{4\pi r^2} \quad (7-19c)$$

式中  $p = Q \, dl$  是电偶极矩的复振幅。因为已经把载流短导线看成一个振荡电偶极子, 其上下两端的电荷与电流的关系是  $I = j\omega Q$ 。

从以上结果可以看出, 近区中, 电基本振子(时变电偶极子)的电场复振幅与静态场的

“静”电偶极子的电场表达式相同；磁场表达式则与静磁场中用毕奥-萨伐尔定律计算电流元  $I \, dl$  所得的公式相同。显然电基本振子的近区场与静态场有相同的性质，因此称为似稳场(准静态场)。此外，近区中电场与磁场有  $\pi/2$  的相位差，因此平均坡印廷矢量为零。也就是说，电基本振子的近区场没有电磁能量向外辐射，电磁能量仅被束缚在电基本振子附近，故近区场又称为束缚场或感应场。

应该指出，这些结论是在满足  $kr \ll 1$  的条件下，忽略了  $\frac{1}{kr}$ 、 $\frac{1}{(kr)^2}$  项后得出的，是一个近似的结果。实际上，正是这些被忽略的项构成了远区场中电磁波的辐射功率。

## 2. 远区场

当  $kr \gg 1$  时， $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ ，即场点  $P$  与源点的距离  $r$  远大于波长  $\lambda$  的区域称为远区。在远区中，有

$$\frac{1}{kr} \gg \frac{1}{(kr)^2} \gg \frac{1}{(kr)^3}$$

故在式(7-17)和式(7-18)中，起主要作用的是含  $1/kr$  的低次幂项，且相位因子  $e^{-jkr}$  必须考虑。因此远区电磁场表达式简化为

$$E_{\theta} = j \frac{I \, dl \, k^2 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-jkr} = j \frac{I \, dl}{2\lambda r} \eta \sin\theta \cdot e^{-jkr} \quad (7-20a)$$

$$H_{\phi} = j \frac{I \, dl \, k \sin\theta}{4\pi r} e^{-jkr} = j \frac{I \, dl}{2\lambda r} \sin\theta \cdot e^{-jkr} \quad (7-20b)$$

从上式可以看出，电场与磁场在时间上同相，因此平均坡印廷矢量不等于零。这表明有电磁能量向外辐射，辐射方向是半径方向，故把远区场称为辐射场。

从式(7-20)中可得出电基本振子远区场有以下特点。

(1) 场的方向：电场只有  $E_{\theta}$  分量；磁场只有  $H_{\phi}$  分量。其复坡印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{e}_r \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\phi}^* = \mathbf{e}_r \frac{1}{2} \frac{|E_{\theta}|^2}{\eta}$$

可见， $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  互相垂直，并都与传播方向  $\mathbf{e}_r$  相垂直。因此电基本振子的远区场是横电磁波(TEM波)。

(2) 场的相位：无论  $E_{\theta}$  或  $H_{\phi}$ ，其空间相位因子都是一  $kr$ ，即其空间相位随离源点的距离  $r$  增大而滞后，等相位面是  $r$  为常数的球面，所以远区辐射场是球面波。由于等相位面上任意点的  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  振幅不相同，所以又是非均匀球面波。 $E_{\theta}/H_{\phi} = \eta$  是一常数，等于媒质的波阻抗。

(3) 场的振幅：远区场的振幅与  $r$  成反比；与  $I$ 、 $dl/\lambda$  成正比。值得注意，场的振幅与电长度  $dl/\lambda$  有关，而不是仅与几何尺寸  $dl$  有关。

(4) 场的方向性：远区场的振幅还正比于  $\sin\theta$ ，在垂直于天线轴的方向( $\theta=90^\circ$ )，辐射场最大；沿着天线轴的方向( $\theta=0^\circ$ )，辐射场为零。这说明电基本振子的辐射具有方向性，这种方向性也是天线的一个主要特性。

下面我们着手计算电基本振子的辐射功率和辐射电阻。如果以电基本振子天线为球心，用一个半径为  $r$  的球面把它包围起来，那么从电基本振子天线辐射出来的电磁能量必然全部通过这个球面，故平均坡印廷矢量在此球面上的积分值就是电基本振子天线辐射出

来的功率  $P_r$ 。因为电基本振子天线在远区任一点的平均坡印廷矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{av} &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right] = \operatorname{Re} \left[ \mathbf{e}_r \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \right] \\ &= \mathbf{e}_r \frac{1}{2} \frac{|E_\theta|^2}{\eta} = \mathbf{e}_r \frac{1}{2} \eta |H_\phi|^2 \\ &= \mathbf{e}_r \frac{1}{2} \eta \left( \frac{I \, dl}{2\lambda r} \sin\theta \right)^2 \end{aligned} \quad (7-21)$$

所以辐射功率为

$$\begin{aligned} P_r &= \oint_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \eta \left( \frac{I \, dl}{2\lambda r} \sin\theta \right)^2 \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\eta}{2} \left( \frac{I \, dl}{2\lambda} \right)^2 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \\ &= \frac{\eta}{2} \left( \frac{I \, dl}{2\lambda} \right)^2 2\pi \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{4}{3} \eta \pi \left( \frac{I \, dl}{2\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (7-22a)$$

以空气中的波阻抗  $\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$  代入, 可得

$$P_r = 40\pi^2 \left( \frac{I \, dl}{\lambda_0} \right)^2 \quad (7-22b)$$

式中  $I$  的单位为 A(安培) 且是复振幅值, 辐射功率  $P_r$  的单位为 W(瓦), 空气中的波长  $\lambda_0$  的单位为 m(米)。

电基本振子辐射出去的电磁能量既然不能返回波源, 因此对波源而言也是一种损耗。利用电路理论的概念, 引入一个等效电阻。设此电阻消耗的功率等于辐射功率, 则有

$$P_r = \frac{1}{2} |I|^2 R_r$$

式中  $R_r$  称为辐射电阻。由式(7-22b)可得电基本振子的辐射电阻为

$$R_r = \frac{2P_r}{|I|^2} = 80\pi^2 \left( \frac{dl}{\lambda_0} \right)^2 \quad (7-23)$$

显然, 辐射电阻可以衡量天线的辐射能力, 它仅仅取决于天线的结构和工作波长, 是天线的一个重要参数。

**例 7-1** 已知电基本振子的辐射功率  $P_r$ , 求远区中任意点  $P(r, \theta, \phi)$  的电场强度的振幅值。

**解:** 利用  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $I = I_m e^{j\phi}$  及式(7-20a), 远区辐射场的电场强度振幅为

$$E_m = \frac{I_m \, dl}{2\lambda_0 r} \eta_0 \sin\theta$$

由式(7-22b)有  $\frac{I_m \, dl}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{P_r}{40\pi^2}}$ , 代入上式得

$$E_m = 3 \sqrt{10 \cdot P_r} \cdot \frac{\sin\theta}{r}$$

**例 7-2** 计算长度  $dl=0.1\lambda_0$  的电基本振子当电流振幅值为 2 mA 时的辐射电阻和辐射功率。

**解:** 由式(7-23)知辐射电阻为

$$R_r = 80\pi^2 \left( \frac{dl}{\lambda_0} \right)^2 = 80\pi^2 \times (0.1)^2 = 7.8957 \, \Omega$$

辐射功率为

$$P_r = \frac{1}{2} |I|^2 R_r = \frac{1}{2} (2 \times 10^{-3})^2 \times 7.8957 = 15.791 \, \mu\text{W}$$

## 7.3 对偶原理与磁基本振子的辐射场

### 7.3.1 磁基本振子的辐射场

磁基本振子是一个半径为  $a$  ( $a \ll \lambda$ ) 的细导线小圆环, 载有高频均匀时谐电流  $i = I_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$ , 其复振幅为  $I = I_m e^{j\phi}$ , 如图 7-4 所示。当此细导线小圆环的周长远小于波长时, 可以认为流过圆环的时谐电流的振幅和相位处处相同, 所以磁基本振子也被称为磁偶极子。现在采用与上节求解电偶极子相类似的方法, 求解磁偶极子的电磁场。

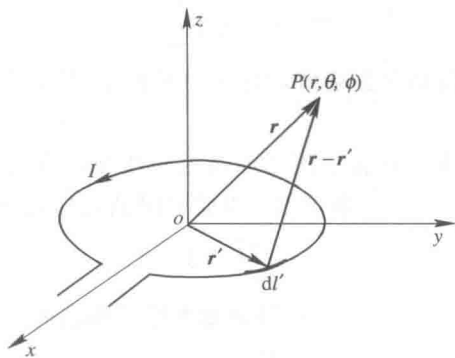


图 7-4 磁基本振子

取图 7-4 所示的球坐标系, 由式(7-13a), 并将其中的  $\mathbf{J}(\mathbf{r}) dV'$  改为  $I d\mathbf{l}'$  (即  $dl' a_t = d\mathbf{l}'$ ), 有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{e^{-jkR}}{R} d\mathbf{l}' = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{l}' \quad (7-24)$$

上式的积分严格计算比较困难, 但因  $r' = a \ll \lambda$ , 所以其中的指数因子可以近似为

$$e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = e^{-jkR} = e^{-jk(R-r)} = e^{-jkr} \cdot e^{-jk(R-r)} \approx e^{-jkr} [1 - jk(R-r)]$$

其中已经考虑了

$$e^{-jk(R-r)} = 1 - jk(R-r) - \frac{1}{2} k^2 (R-r)^2 + \cdots \quad (|-jk(R-r)| \ll 1)$$

并忽略了高次幂项。将上式代入式(7-24), 可得磁矢位的近似表达式为

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{1}{R} (1 + jkr - jkR) e^{-jkr} d\mathbf{l}'$$

上式中的积分是对带“'”的坐标变量(源点)进行的,  $r$ (场点坐标)是常量, 所以上式可以改写为

$$\mathbf{A}(r) = (1 + jkr) e^{-jkr} \left[ \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \frac{jk\mu I}{4\pi} e^{-jkr} \oint_l d\mathbf{l}' \quad (7-25)$$

显然, 上式中第二项的线积分是零。第一项方括号中的因子与“静”磁偶极子(恒定电流环)的磁矢位表达式相同。此式的运算结果为

$$\frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \mathbf{e}_\phi \frac{\mu SI}{4\pi r^2} \sin\theta = \frac{\mu \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

用于式(7-25), 只要注意到对现在讨论的“时变”磁偶极子, 该式中的  $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z \pi a^2 I = \mathbf{e}_z SI$  是复矢量。于是有

$$\mathbf{A}(r) = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu IS}{4\pi r^2} (1 + jkr) \sin\theta \cdot e^{-jkr} \quad (7-26)$$

将式(7-26)代入  $\mathbf{H} = \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}$  可得磁基本振子的磁场为

$$H_r = \frac{IS}{2\pi} \cos\theta \left( \frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) e^{-jkr} \quad (7-27a)$$

$$H_\theta = \frac{IS}{4\pi} \sin\theta \left( \frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{-jkr} \quad (7-27b)$$

$$H_\phi = 0 \quad (7-27c)$$

再由  $\mathbf{E} = (j\omega\epsilon)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}$ , 可得磁基本振子的电场为

$$E_r = 0 \quad (7-28a)$$

$$E_\theta = 0 \quad (7-28b)$$

$$E_\phi = -j \frac{ISk}{4\pi} \eta \sin\theta \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-jkr} \quad (7-28c)$$

由以上诸式可见, 电场强度矢量与磁场强度矢量互相垂直, 这一点和电基本振子的电磁场相同; 但是,  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的取向互换, 即  $\mathbf{E}$  在与赤道面平行的平面内, 而  $\mathbf{H}$  则在子午面内, 这与电基本振子的电磁场取向比较, 正好相反。

磁基本振子的电磁场也可以分成近区和远区来研究。不难看出, 前面对电基本振子电磁场性质的讨论也适应于磁基本振子。对远区 ( $kr \gg 1$ ), 只保留  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  表达式中含  $1/kr$  的项, 可由式(7-27)和式(7-28)得到磁基本振子的远区辐射场:

$$H_\theta = -\frac{ISk^2}{4\pi r} \sin\theta \cdot e^{-jkr} = -\frac{\pi IS}{\lambda^2 r} \sin\theta \cdot e^{-jkr} \quad (7-29a)$$

$$E_\phi = \frac{ISk^2}{4\pi r} \eta \sin\theta \cdot e^{-jkr} = \frac{\pi IS}{\lambda^2 r} \eta \sin\theta \cdot e^{-jkr} = -\eta H_\theta \quad (7-29b)$$

由上式可以看出, 磁基本振子的远区辐射场具有以下特点:

(1) 磁基本振子的辐射场也是 TEM 非均匀球面波。

(2)  $\frac{E_\phi}{(-H_\theta)} = \eta$ 。

(3) 电磁场与  $1/r$  成正比。

(4) 与电基本振子的远区场比较, 只是  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$  的取向互换, 远区场的性质相同。

磁基本振子的平均坡印廷矢量可由式(7-29)获得:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{av} &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right] = \operatorname{Re} \left[ -\mathbf{e}_r \frac{1}{2} E_\theta H_\phi^* \right] \\ &= \mathbf{e}_r \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\pi IS}{\lambda^2 r} \right)^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

辐射功率为

$$\begin{aligned} P_r &= \oint_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\pi IS}{\lambda^2 r} \right)^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\eta}{2} \left( \frac{\pi IS}{\lambda^2} \right)^2 \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{4}{3} \eta \pi \cdot \left( \frac{\pi IS}{\lambda^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (7-30a)$$

以空气的波阻抗代入上式,有

$$P_r = 160\pi^2 \cdot \left( \frac{\pi IS}{\lambda_0^2} \right)^2 = 160\pi^6 \cdot \left( \frac{a}{\lambda_0} \right)^4 I^2 \quad (7-30b)$$

辐射电阻为

$$R_r = \frac{2P_r}{|I|^2} = 320\pi^6 \cdot \left( \frac{a}{\lambda_0} \right)^4 \quad (7-31)$$

**例 7-3** 将周长为  $0.1\lambda_0$  的细导线绕成圆环,以构造磁基本振子,求此磁基本振子的辐射电阻。

**解:** 由式(7-31)知,此磁基本振子的辐射电阻为

$$R_r = 320\pi^6 \cdot \left( \frac{a}{\lambda_0} \right)^4 = 320\pi^6 \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \times 0.1 \right)^4 = 1.9739 \times 10^{-2} \, \Omega$$

将此结果与例 7-2 比较可见:长度为此磁基本振子周长的电基本振子的辐射电阻远比磁基本振子的辐射电阻大,即电基本振子的辐射能力大于磁基本振子的辐射能力。

**例 7-4** 沿  $z$  轴放置大小为  $I_1 l_1$  的电基本振子,在  $xoy$  平面上放置大小为  $I_2 S_2$  的磁基本振子,它们的取向和所载电流的频率相同,中心位于坐标原点,求它们的辐射电场强度。

**解:** 由式(7-20a)和式(7-29b)知,电基本振子和磁基本振子在空间任意点产生的合成辐射场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_\theta E_\theta + \mathbf{e}_\phi E_\phi = \left( \mathbf{e}_\theta j \frac{I_1 l_1}{2\lambda} + \mathbf{e}_\phi \frac{\pi I_2 S_2}{\lambda^2} \right) \eta \sin \theta \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}$$

这是一椭圆极化波。当  $\frac{I_1 l_1}{2\lambda} = \frac{\pi I_2 S_2}{\lambda^2}$  时是右旋圆极化波。可见这一组合形式能够构造一幅产生圆极化波的天线。

### 7.3.2 对偶原理

我们知道,稳态电磁场中,电场的源是静止的电荷,磁场的源是恒定电流。那么是否存在静止的磁荷产生磁场,恒定的磁流产生电场呢?迄今为止我们还不能肯定自然界中是否存在磁荷和磁流。电流及电荷是产生电磁场的唯一的源。但是,如果我们在理论上引入假想的磁荷与磁流概念,将一部分原本是由电荷和电流产生的电磁场用能够产生同样电磁场的等效磁荷和等效磁流来代替,即将“电源”换成“磁源”,有时可以大大简化计算工作量。稳态电磁场具有这种特性,时变电磁场也具有这种特性。

引入假想的磁荷和磁流概念之后,磁荷与磁流也产生电磁场,因此麦克斯韦方程组可

修改为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (7-32a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - j\omega\mu\mathbf{H} \quad (7-32b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7-32c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (7-32d)$$

上式称为广义麦克斯韦方程组。式中下标 m 表示磁量； $\mathbf{J}_m$  是磁流密度，其量纲为  $\text{V}/\text{m}^2$ ； $\rho_m$  是磁荷密度，其量纲为  $\text{Wb}/\text{m}^3$  (韦伯每立方米)。式(7-32a)的等号右边用正号，表示电流与磁场之间有右手螺旋关系；式(7-32b)的等号右边用负号，表示磁流与电场之间有左手螺旋关系。

在无界的简单媒质中，如果存在“电源” $\mathbf{J}$ 、 $\rho$ ，它们产生的电磁场用  $\mathbf{E}_e$ 、 $\mathbf{H}_e$  表示，则其满足的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}_e \quad (7-33a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = -j\omega\mu\mathbf{H}_e \quad (7-33b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_e = \rho \quad (7-33c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_e = 0 \quad (7-33d)$$

如果存在“磁源” $\mathbf{J}_m$ 、 $\rho_m$ ，它们产生的电磁场用  $\mathbf{E}_m$ 、 $\mathbf{H}_m$  表示，则其满足的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = j\omega\epsilon\mathbf{E}_m \quad (7-34a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m - j\omega\mu\mathbf{H}_m \quad (7-34b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_m = 0 \quad (7-34c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_m = \rho_m \quad (7-34d)$$

由上可见，如果对式(7-33)作以下变量代换：

$$\mathbf{H}_e \rightarrow -\mathbf{E}_m, \quad \mathbf{E}_e \rightarrow \mathbf{H}_m, \quad \epsilon \rightarrow \mu, \quad \mu \rightarrow \epsilon, \quad \rho \rightarrow \rho_m, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_m \quad (7-35)$$

就可得到式(7-34)。这种对应关系称为电磁场的对偶原理。

如果有两个问题，第一个问题满足麦克斯韦方程式(7-33)和相应的边界条件，第二个问题满足麦克斯韦方程式(7-34)和相应的边界条件，那么应用电磁场的对偶原理，只要按式(7-35)作对偶量代换，即可由第一个问题的解得到第二个问题的解，反之亦然。

**例 7-5** 应用对偶原理，求磁基本振子的远区辐射场。

**解：**引入假想的磁荷与磁流概念之后，载流细导线小圆环可等效为相距  $dl$ ，两端磁荷分别为  $+q_m$  和  $-q_m$  的磁偶极子，其磁偶极矩

$$\mathbf{p}_m = q_m dl = \mathbf{e}_z q_m dl = \mathbf{e}_z \mu IS$$

由此可得磁基本振子的磁流

$$i_m = \frac{dq_m}{dt} = \frac{\mu S}{dl} \frac{di}{dt} = \frac{\mu S}{dl} \frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t + \phi)]$$

其对应的磁流复量为

$$I_m = j\omega \frac{\mu S}{dl} I \quad (I = I_m e^{-j\phi})$$

如果定义磁偶极子对应的磁流元为  $I_m dl$ ，那么它与电流环的关系为

$$I_m dl = j\omega \mu SI = jk\eta IS = j \frac{2\pi}{\lambda} \eta IS \quad (7-36)$$

或

$$IS = -j \frac{\lambda}{2\pi\eta} I_m dl$$

将上式代入式(7-29), 可将磁偶极子产生的远区场重写为

$$E_\phi = -j \frac{I_m dl}{2\lambda r} \sin\theta \cdot e^{-jkr} \quad (7-37a)$$

$$H_\theta = j \frac{I_m dl}{2\lambda r \eta} \sin\theta \cdot e^{-jkr} \quad (7-37b)$$

式(7-37)也可以根据对偶原理, 将式(7-20)经过式(7-35)的变换得到。

## 7.4 天线的电参数

天线的作用是辐射(发射)和接收电磁波。为了评价一幅天线的技术性能优劣, 必须规定一些能够表征天线性能的参数。根据互易原理(后面将要介绍), 同一副天线用作辐射和接收时, 其特性参数是相同的, 只是具体含义有所不同。为叙述方便起见, 下面均以发射天线来定义各个电参数。

### 7.4.1 辐射方向图

#### 1. 方向性函数和方向图

任何实际天线的辐射都具有方向性。离开天线一定距离处, 描述天线辐射的电磁场强度在空间的相对分布情况的数学表示式, 称为天线的方向性函数; 把方向性函数用图形表示出来, 就是方向图。因为天线的辐射场分布于整个空间, 所以天线的方向图通常是三维的立体方向图。在球坐标系中, 场强随  $\theta$  和  $\phi$  两个坐标变量变化。虽然现在利用电子计算机可以绘制很复杂的天线的立体方向图, 但是常用的仍是所谓“主平面”上的方向图。因为有了这样两个主平面上的方向图, 整个立体的方向性也就可以想见了。对于线天线, 主平面指包含天线导线轴的平面(称为  $E$  面)和垂直于天线导线轴的平面(称为  $H$  面); 对于面天线, 主平面指与天线口面上电场矢量相平行的平面( $E$  面)和与天线口面上磁场矢量相平行的平面( $H$  面)。这两个平面上的方向图分别称为  $E$  面方向图和  $H$  面方向图。

为便于绘制方向图, 定义场强振幅的归一化方向性函数为

$$F(\theta, \phi) = \frac{|E(\theta, \phi)|}{|E_{\max}|} \quad (7-38)$$

式中,  $|E_{\max}|$  是  $|E(\theta, \phi)|$  的最大值。

**例 7-6** 绘制电基本振子的方向图。

**解:** 根据式(7-38)的方向性函数定义和电基本振子远区辐射场的表示式(7-20a)知, 电基本振子的方向性函数为

$$F(\theta, \phi) = |\sin\theta|$$

由此方向性函数绘制的  $E$  面方向图、 $H$  面方向图和立体方向图如图 7-5 所示。



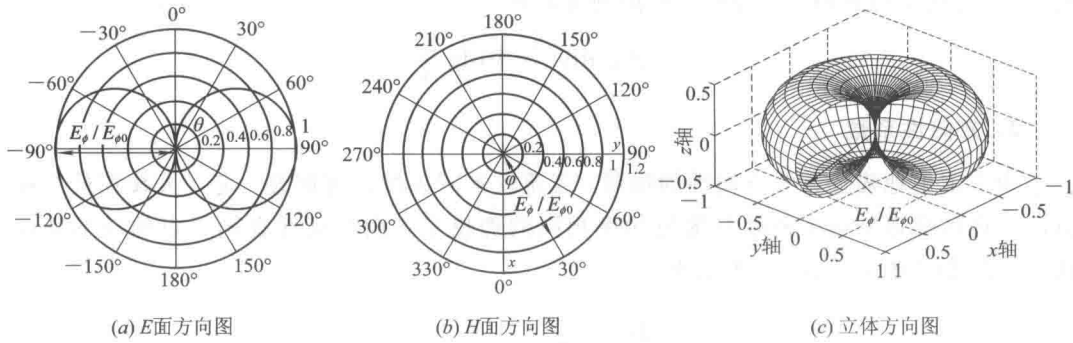


图 7-5 电基本振子的方向图

实际天线的方向图通常要比图 7-5 复杂，方向图可能包含多个波瓣，分别称为主瓣、副瓣和后瓣，如图 7-6 所示，此图表示某天线的极坐标形式方向图。

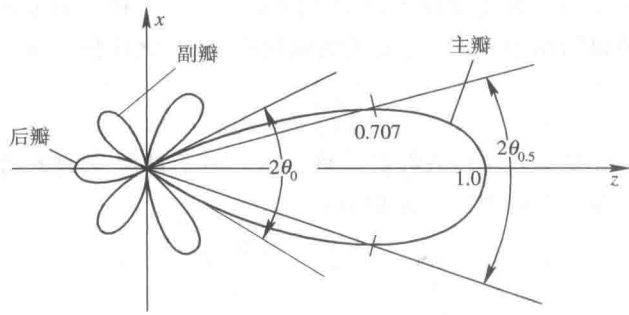


图 7-6 天线方向图的波瓣

主瓣就是包含有最大辐射方向的波瓣，除主瓣外的其它波瓣都统称为副瓣。位于主瓣正后方的波瓣(副瓣)另称为后瓣。为了对各种天线的方向图进行定量比较，通常提出以下电参数：

(1) 主瓣宽度：主瓣最大辐射方向两侧的两个半功率点(即功率密度下降为最大值的一半，或场强下降为最大值的  $1/\sqrt{2}$ )的矢径之间的夹角，称为主瓣宽度，记为  $2\theta_{0.5}$ 。主瓣宽度愈小，说明天线辐射的电磁能量愈集中，定向性愈好。图 7-5 表示的电基本振子的主瓣宽度为  $90^\circ$ 。主瓣宽度也称为半功率角。

(2) 副瓣电平：副瓣最大辐射方向上的功率密度  $S_1$  与主瓣最大辐射方向上的功率密度  $S_0$  之比的对数值，称为副瓣电平，即

$$P_{\text{sub}}(\text{dB}) = 10 \lg \frac{S_1}{S_0}$$

方向图的副瓣是指不需要辐射的区域，所以其电平应尽可能地低。一般地，离主瓣较远的副瓣电平要比离主瓣较近的副瓣电平低。因此，副瓣电平是指第一副瓣(离主瓣最近的电平最高)的电平。

(3) 前后向抑制比：后瓣最大辐射方向上的功率密度  $S_a$  与主瓣最大辐射方向上的功率

密度  $S_0$  之比的对数值, 称为前后向抑制比, 即

$$P_{ab}(\text{dB}) = 10 \lg \frac{S_a}{S_0}$$

## 2. 方向性系数

为了定量地描述天线方向性的强弱, 或比较不同天线的方向性, 定义天线在最大辐射方向上远区某点的功率密度与辐射功率相同的理想无方向性天线在同一点的功率密度之比, 为天线的方向性系数, 表示为

$$D = \frac{S_{\max}}{S_0} \bigg|_{P_r \text{ 相同, } r \text{ 相同}} \quad (7-39a)$$

或

$$D = \frac{|E_{\max}|^2}{|E_0|^2} \bigg|_{P_r \text{ 相同, } r \text{ 相同}} \quad (7-39b)$$

方向性系数也可以定义为, 在天线最大辐射方向上某点产生相等的电场强度的条件下, 理想的无方向性天线的辐射功率  $P_{r0}$  与某天线的辐射功率  $P_r$  之比值, 即

$$D = \frac{P_{r0}}{P_r} \bigg|_{\text{相等电场强度}} \quad (7-40)$$

根据上述定义, 可导出天线方向性系数的计算公式。对于被研究的天线, 其辐射功率等于在半径为  $r$  的球面上对功率密度进行面积分:

$$\begin{aligned} P_r &= \oint_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_S \frac{|E(\theta, \phi)|^2}{\eta_0} dS \\ &= \frac{|E_{\max}|^2 \cdot r^2}{240\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F^2(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (7-41)$$

对于理想的无方向性天线, 因其在空间各个方向上具有相同的辐射, 故其辐射功率为

$$P_{r0} = 4\pi r^2 S_0 = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{|E_0|^2}{120\pi} = \frac{|E_0|^2 r^2}{60} \quad (7-42)$$

由式(7-41)和式(7-42), 再考虑条件——辐射功率相同, 即  $P_r = P_{r0}$ , 则根据式(7-39b)得

$$D = \frac{|E_{\max}|^2}{|E_0|^2} \bigg|_{P_r \text{ 相同, } r \text{ 相同}} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F^2(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi} \quad (7-43)$$

若  $F(\theta, \phi) = F(\theta)$ , 即天线方向图轴对称(与  $\phi$  无关), 则

$$D = \frac{2}{\int_0^\pi F^2(\theta) \sin\theta d\theta} \quad (7-44)$$

显然, 对于理想的无方向性天线, 其方向性函数为  $F(\theta, \phi) = 1$ , 故其方向性系数为 1。因为有方向性的天线的辐射功率主要集中在其最大辐射方向附近, 因此在其最大辐射方向上某点与理想无方向性天线具有相同电场强度的条件下, 它所需要的辐射功率一定比理想无方向性天线的辐射功率小, 即  $P_r < P_{r0}$ 。因此, 天线的方向性系数总大于 1。方向性愈强,  $D$  值愈大。

不同天线都以理想无方向性天线作为标准进行比较, 因此能比较出不同天线最大辐射

的相对大小,即方向性系数能比较不同天线方向性的强弱。公式(7-39a)中:

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|E_{\max}|^2}{120\pi}, S_0 = \frac{P_{\text{ro}}}{4\pi r^2}$$

故

$$D = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{|E_{\max}|^2}{120\pi}}{\frac{P_{\text{ro}}}{4\pi r^2}} = \frac{|E_{\max}|^2 r^2}{60P_{\text{ro}}}$$

因此

$$|E_{\max}| = \frac{\sqrt{60P_{\text{ro}}D}}{r} \quad (7-45a)$$

对于理想的无方向性天线,因其方向性系数  $D=1$ , 故有

$$|E_{\max}| = \frac{\sqrt{60P_{\text{ro}}}}{r} \quad (7-45b)$$

上式中  $|E_{\max}|$  表示天线最大辐射方向上电场强度的复振幅的模。

比较式(7-45a)和式(7-45b),可以看出方向性系数的物理意义如下:某天线的方向性系数,表征该天线在其最大辐射方向上比起无方向性天线来说把辐射功率增大了  $D$  倍。例如为了在空间一定距离的  $M$  点产生一定的场强,若使用无方向性天线,需要馈给无方向性天线 10 W 的辐射功率;但是若使用方向性系数  $D=10$  的有方向性天线,并将有方向性天线对准  $M$  点,就只需 1 W 的辐射功率。

**例 7-7** 计算电基本振子的方向性系数。

**解:** 电基本振子的方向性函数  $F(\theta, \phi) = \sin\theta$ , 故其方向性系数为

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\phi} = 1.5$$

### 7.4.2 辐射效率

天线的辐射效率(Radiation Efficiency)表征天线能否有效地转换能量,定义为天线的辐射功率与输入到天线上的功率(输入功率)之比:

$$\eta_r = \frac{P_r}{P_{\text{in}}} = \frac{P_r}{P_r + P_L}$$

式中的  $P_L$  表示天线的总损耗功率。通常,发射天线的损耗功率包括:天线导体中的热损耗、介质材料的损耗、天线附近物体的感应损耗等。

如果把天线向外辐射的功率看作被某个电阻  $R_r$  所吸收,该电阻称为辐射电阻。与此相似,也把总损耗功率看作被某个损耗电阻  $R_L$  所吸收,则有

$$P_r = \frac{1}{2} I^2 R_r, \quad P_L = \frac{1}{2} I^2 R_L$$

故天线的辐射效率可表示为

$$\eta_r = \frac{P_r}{P_{\text{in}}} = \frac{P_r}{P_r + P_L} = \frac{R_r}{R_r + R_L} \quad (7-46)$$

可见,要提高天线效率,应尽可能地提高辐射电阻和降低损耗电阻。

对于频率很低的长、中波天线,由于波长很长,而天线的电长度  $l/\lambda$  较小,故其辐射功率较低,天线辐射效率也较低。但是,大多数超高频微波天线的损耗都很小,辐射效率可接近 1。

### 7.4.3 增益系数

方向性系数表征天线辐射能量的集中程度,辐射效率则表征在转换能量上的效能。将两者结合起来,就可得到表征天线总效能的一个指标——增益系数。其定义为天线在其最大辐射方向上远区某点的功率密度与输入功率相同的无方向性天线在同一点产生的功率密度之比,表示为

$$G = \frac{S_{\max}}{S_0} \Big|_{P_{\text{in}} \text{ 相同}} \quad (7-47a)$$

或

$$G = \frac{|E_{\max}|^2}{|E_0|^2} \Big|_{P_{\text{in}} \text{ 相同}} \quad (7-47b)$$

增益系数也可定义为:在天线最大辐射方向上某点产生相等电场强度的条件下,理想的无方向性天线所需要的输入功率  $P_{\text{ino}}$  与某天线所需要的输入功率  $P_{\text{in}}$  之比,即

$$G = \frac{P_{\text{ino}}}{P_{\text{in}}} \Big|_{E \text{ 相同}} \quad (7-48)$$

比较式(7-48)和式(7-40)可见,增益系数和方向性系数的计算式是相似的,差别在于增益系数用输入功率计算,而方向性系数用辐射功率计算。考虑到辐射效率的定义关系  $P_r = \eta_r P_{\text{in}}$ ,以及理想无方向性天线的效率  $\eta_{\text{ro}}$  一般被认为是 1,故

$$G = \frac{P_{\text{ino}}}{P_{\text{in}}} \Big|_{E \text{ 相同}} = \frac{P_{\text{ro}}/\eta_{\text{ro}}}{P_r/\eta_r} \Big|_{E \text{ 相同}} = \eta_r D \quad (7-49)$$

由此可见,只有当天线的  $D$  值大,辐射效率  $\eta_r$  也高时,天线的增益才较高。增益系数比较全面地表征了天线的性能。通常用分贝来表示增益系数,即令

$$G(\text{dB}) = 10 \lg G$$

### 7.4.4 输入阻抗

天线与馈线相连接,欲使天线能从馈线获得最大功率,就必须使天线和馈线良好匹配,即要使天线的输入阻抗与馈线的特性阻抗相等。所谓天线的输入阻抗,是指天线输入端的高频电压与输入端的高频电流之比,可表示为

$$Z_{\text{in}} = \frac{U_{\text{in}}}{I_{\text{in}}} = R_{\text{in}} + jX_{\text{in}} \quad (7-50)$$

### 7.4.5 极化形式

天线的极化特性是以天线辐射的电磁波在最大辐射方向上电场强度矢量的空间取向来定义的,分为线极化、圆极化和椭圆极化。线极化又分为水平极化和垂直极化;圆极化又分左旋圆极化和右旋圆极化。

## 7.5 对称线天线和天线阵的概念

辐射体由横截面半径远小于波长的金属导线构成的天线,称为线天线。线天线广泛应用于通信、广播、雷达等领域,其内容非常丰富,这里仅就线天线中的对称振子天线进行讨论。

介绍对称阵子线天线的远区辐射电磁场之前,先介绍电磁场的叠加定理。如果在我们研究的区域内及边界上,介质的 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$ 都与场强无关,即我们处理的是线性介质,那么麦克斯韦方程所描述的系统就是线性系统;根据线性系统的叠加原理,则 $E_i$ 、 $H_i$ 、 $D_i$ 、 $B_i$ (其中 $i=1\sim n$ )是给定边界条件下麦克斯韦方程的解, $\sum_{i=1}^n E_i$ 、 $\sum_{i=1}^n H_i$ 、 $\sum_{i=1}^n D_i$ 、 $\sum_{i=1}^n B_i$ 必是麦克斯韦方程在同一边界条件下的解。这就是叠加定理。

### 7.5.1 对称振子天线

#### 1. 对称振子的电流分布和远区场

对称振子是最基本的线天线形式,如图7-7所示。它是一对等长度的直导线,其内端与馈线相接,一臂长度为 $l$ ,全长为 $2l$ ,圆柱导体的半径为 $a$ 。这种结构可以看成是一段终端开路的双线传输线的两根导线张开 $180^\circ$ 的张角所形成。

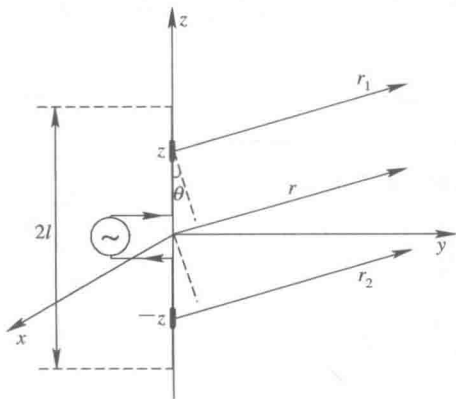


图 7-7 臂长为 $l$ 的对称振子

对称振子是应用非常广泛的一种基本天线,它既可单独使用,也可作为阵列天线的组成单元,还可作为某些微波天线的馈源。这种看起来非常简单的结构,即使认为导线是理想导体,要确定导线上的正确电流分布,也是极其困难的电磁场边值问题。所以,作为工程近似,通常假定电流沿导线按正弦分布。当导线直径约为 $0.01\lambda$ 或更小时,这种假设是对电流实际分布的很好近似。

如图7-7所示,设对称振子沿 $z$ 轴放置,振子中心位于坐标原点,则振子上的电流分布表示式为

$$I(z) = I_m \sin[k(l - |z|)] \quad (7-51)$$

式中: $I_m$ 为电流驻波的波腹电流,即电流最大值; $k$ 为对称振子上电流传输的相移常数,

在此它就等于自由空间的相移常数, 即  $k=2\pi/\lambda$ 。

有了电流分布, 便可以利用叠加原理来求出对称振子的远区场。由于对称振子天线的长度可与波长相比拟, 因而沿天线分布的电流不再是振幅和相位处处相同的均匀电流。此时尽管不能把整个天线看作电基本振子, 但可以把对称振子分解成许多小电流元, 每个长度为  $dz$  的小电流元  $I dz$  就是一个电基本振子, 其远区辐射电场强度可由式(7-20a)给出:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\theta E_\theta = j \frac{I dz}{2\lambda r} \eta \sin\theta \mathbf{e}_\theta \cdot e^{-jkr}$$

式中  $r$  为小电流元  $I dz$  与场点间的距离。将这些互不相同的小电流元  $I dz$  在空间同一点产生的辐射场叠加, 就获得了对称振子的辐射场。

为便于计算, 我们在振子两臂上点  $|z|$  处各取小电流元  $I dz$ , 如图 7-7 所示。考虑远区场, 因  $r \gg l$ , 故可以认为各小电流元  $I dz$  到场点的射线平行。在自由空间中, 由式(7-20a)知, 振子上、下臂上的小电流元的远区场分别为

$$dE_{\theta 1} = j \frac{60\pi I dz}{\lambda_0 r_1} \sin\theta \cdot e^{-jkr_1} \quad (7-52a)$$

$$dE_{\theta 2} = j \frac{60\pi I dz}{\lambda_0 r_2} \sin\theta \cdot e^{-jkr_2} \quad (7-52b)$$

在平行射线近似下,  $dE_{\theta 1}$ 、 $dE_{\theta 2}$  的方向相同; 且分母中的  $r_1$ 、 $r_2$  均可用  $r$  代替, 即可忽略对称振子上各小电流元  $I dz$  到场点距离不同对远区场振幅的影响。但是, 决定远区场的相位因子中的  $r_1$ 、 $r_2$  却必须用更精确的近似值。因为场点虽然很远, 但对称振子天线上的各小电流元  $I dz$  到场点的距离差可达若干波长, 因此与波长相比是不能忽略的, 它将引起显著的相位差。

由图 7-7 可见:

$$r_1 = r - |z| \cos\theta, \quad r_2 = r + |z| \cos\theta \quad (7-53)$$

于是两个小电流元的远区辐射场之和为

$$\begin{aligned} dE_\theta &= dE_{\theta 1} + dE_{\theta 2} \\ &= j \frac{60\pi I_m dz}{\lambda_0 r} \sin\theta \cdot [e^{-jk(r-|z|\cos\theta)} + e^{-jk(r+|z|\cos\theta)}] \\ &= j \frac{120\pi I_m \sin[k(l-|z|)] dz}{\lambda_0 r} \sin\theta \cdot \cos(k|z|\cos\theta) \cdot e^{-jkr} \end{aligned} \quad (7-54)$$

将  $dE_\theta$  从 0 到  $l$  对  $z$  积分, 便得对称振子的辐射场:

$$E_\theta = j \frac{60 I_m}{r} \left[ \frac{\cos(kl \cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta} \right] e^{-jkr} \quad (7-55)$$

其远区磁场与电场的关系仍为

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{120\pi}$$

可见, 对称振子的辐射场是一个球面波, 其等相位面是以振子中心为球心、半径为常数的球面。电场只有  $E_\theta$  分量, 磁场只有  $H_\phi$  分量, 是横电磁波。在不同的  $\theta$  方向上有不同的辐射场强度值, 即其具有方向性。

对称振子最常见的长度是  $l=\lambda/4$ , 即振子全长  $2l=\lambda/2$ , 称为半波振子。其远区辐射场为

$$\begin{cases} E_{\theta} = j \frac{60 I_m \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{r \sin\theta} e^{-jkr} \\ H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{\eta_0} \end{cases} \quad (7-56)$$

## 2. 对称振子的电参数

### 1) 对称振子的方向图

通常取式(7-55)中与方向有关的因子作为对称振子的方向性函数,称为未归一化的方向性函数:

$$f(\theta, \phi) = \frac{|E(\theta, \phi)|}{60 I_m / r} = \frac{\cos(kl \cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta} \quad (7-57a)$$

由其可得出按式(7-38)定义的归一化方向性函数:

$$F(\theta, \phi) = \frac{f(\theta, \phi)}{f_{\max}} \quad (7-57b)$$

式中  $f_{\max}$  是  $f(\theta, \phi)$  的最大值。对于半波振子,有

$$f(\theta, \phi) = F(\theta, \phi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \quad (7-57c)$$

由式(7-57a)可见,方向性函数仅与  $\theta$  有关,而与  $\phi$  无关。即  $H$  面的方向图是圆,与对称振子的电长度无关;  $E$  面的方向图总是关于  $\theta = \pi/2$  的平面对称,且方向图形状随电长度  $2l/\lambda$  变化。图 7-8 画出了四种不同电长度的对称振子的  $E$  面方向图。

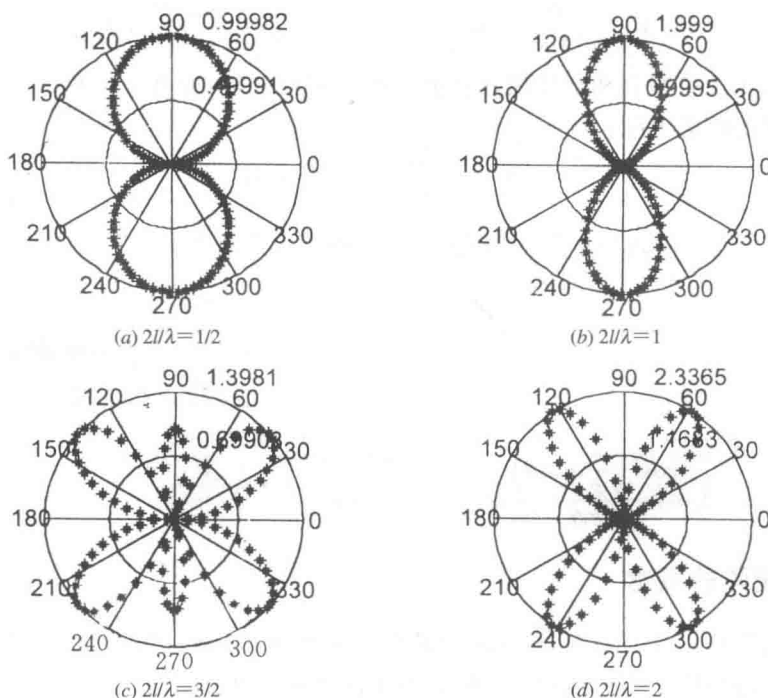


图 7-8 对称振子的  $E$  面方向图

从图 7-8 可见, 当  $2l/\lambda \leq 1$  时, 方向图呈 8 字形, 最大辐射方向在  $\theta=90^\circ$  方向上, 且随电长度的增加, 方向图变尖锐; 当  $2l/\lambda > 1$  时, 对称振子上出现反向电流, 方向图上除主瓣外, 还出现副瓣; 当电长度继续增加, 达到  $2l/\lambda=2$  时, 原来的主瓣消失, 方向图变成同样大小的四个波瓣。方向图形状的变化与对称振子上的电流分布密切相关。

半波振子的  $E$  面方向图如图 7-8(a) 所示, 在  $\theta=\pi/2$  时有最大辐射, 在  $\theta=0^\circ$  时没有辐射。

## 2) 对称振子的辐射功率和辐射电阻

对称振子的辐射功率, 通常用平均坡印廷矢量在一个中心位于对称振子中心、半径足够大(远区), 并且包围对称振子天线的球面上的积分来表示:

$$\begin{aligned} P_r &= \oint_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 30 I_m^2 \int_0^\pi \frac{[\cos(kl \cos\theta) - \cos kl]^2}{\sin\theta} \, d\theta \end{aligned} \quad (7-58)$$

半波振子的辐射功率为

$$P_r = 30 I_m^2 \int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right]^2}{\sin\theta} \, d\theta = 30 I_m^2 \times 1.2188 = 36.564 I_m^2 \quad (\text{W})$$

由于对称振子天线的辐射功率与辐射电阻的关系为

$$P_r = \frac{1}{2} I_m^2 R_r$$

因此辐射电阻为

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 60 \int_0^\pi \frac{[\cos(kl \cos\theta) - \cos kl]^2}{\sin\theta} \, d\theta \quad (7-59)$$

此式积分可以用正弦积分和余弦积分表示, 但更直接的计算是作数值积分。

半波振子的辐射电阻:

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 73.128 \, \Omega$$

对于半波振子, 由式(7-57c)和式(7-43)得其方向性系数:

$$\begin{aligned} D &= \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F^2(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi} \\ &= \frac{2}{\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \, d\theta} = \frac{2}{1.2188} = 1.641 \end{aligned}$$

## 7.5.2 天线阵的概念

天线阵或阵列天线(Array Antenna)是以一定规律排列的相同天线的组合。组成天线阵的独立单元称为阵元或天线单元。如果阵元排列在一直线上或一平面上, 则称为直线阵或平面阵。下面简单介绍  $N$  元均匀直线阵, 以便掌握分析方法及基本概念。

如果  $N$  元阵中相邻阵元间的间距相等, 各个阵元上的电流振幅也相等, 电流相位则按



等差级数递增或递减, 那么称此直线阵为  $N$  元均匀直线阵, 如图 7-9 所示。

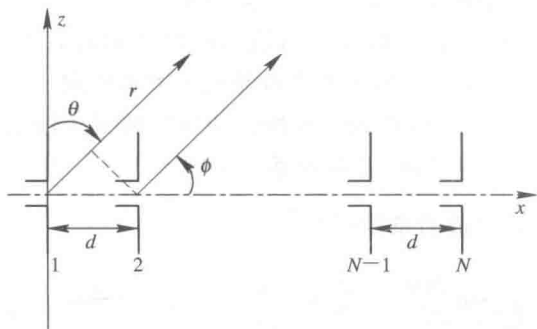


图 7-9  $N$  元均匀直线阵(一)

设相邻阵元的间距为  $d$ , 各阵元上电流的振幅为 1, 但相位自第一个阵元起依次超前一个相角  $\beta$ , 即

$$I_i = 1e^{j(i-1)\beta} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

由图 7-9 可见, 各阵元在场点产生的辐射场存在相位差, 阵元 2 的辐射场比阵元 1 的辐射场超前相位  $\Psi = kd \cos \phi + \beta$ ; 同样阵元 3 的辐射场比阵元 2 的辐射场超前相位  $\Psi$ , 而比阵元 1 的辐射场超前相位  $2\Psi$ ; 以此类推。因此, 天线阵在场点产生的总电场强度为

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + \dots + E_N \\ &= E_1 [1 + e^{j\Psi} + e^{j2\Psi} + \dots + e^{j(N-1)\Psi}] \end{aligned} \quad (7-60)$$

式中,  $E_1, E_2, \dots, E_N$  分别为阵元 1、2、 $\dots$ 、 $N$  在场点所产生的远区辐射场。

利用等比级数求和公式, 式(7-60)可以写为

$$|E| = |E_1| \left| \frac{1 - e^{jN\Psi}}{1 - e^{j\Psi}} \right| = |E_1| \left| \frac{\sin \frac{N\Psi}{2}}{\sin \frac{\Psi}{2}} \right| = |E_1| f_N(\Psi)$$

式中:

$$f_N(\Psi) = \left| \frac{\sin \frac{N\Psi}{2}}{\sin \frac{\Psi}{2}} \right| \quad (7-61)$$

如果天线阵的每个阵元都是相同的半波振子, 那么由式(7-56)可知:

$$\begin{aligned} |E_1| &= \frac{60 |I_m|}{r} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} = \frac{60 |I_m|}{r} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \phi\right)}{\cos \phi} \\ &= \frac{60 |I_m|}{r} \cdot f_1(\phi) \end{aligned}$$

式中:

$$f_1(\phi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \phi\right)}{\cos \phi}$$

为半波振子的方向性函数。于是  $N$  元均匀直线阵的方向性函数为

$$F(\phi) = f_1(\phi) \cdot f_N(\Psi) \quad (7-62)$$

式中:  $f_N(\Psi)$  称为天线阵的阵函数(阵因子方向性函数), 它仅与阵元在天线阵中的排列、激励电流的振幅和相位有关, 而与阵元本身的结构尺寸和取向无关;  $f_1(\phi)$  是阵元的方向性函数, 称为阵元因子, 它取决于阵元本身的结构尺寸和取向, 与天线阵的排列方式无关。

从式(7-62)可以看出, 天线阵的方向性函数等于阵元天线的方向性函数乘以天线阵的阵函数。这就是方向性相乘原理(方向图乘积定理)。

天线阵的阵函数为最大值的条件可由  $\frac{df_N(\Psi)}{d\Psi} = 0$  求得:

$$\frac{df_N(\Psi)}{d\Psi} = \frac{d}{d\Psi} \frac{\sin \frac{N\Psi}{2}}{\sin \frac{\Psi}{2}} = \frac{\frac{N}{2} \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{N\Psi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{N\Psi}{2}}{\sin^2 \frac{\Psi}{2}} = 0$$

由此可得

$$\tan \frac{N\Psi}{2} = N \tan \frac{\Psi}{2}$$

此式仅当  $\Psi=0$  时成立, 所以阵函数出现最大值的条件为

$$\Psi = 0 \quad (7-63)$$

以上  $N$  元均匀直线阵的方向性函数是对  $E$  面而言的。不难看出, 在图 7-10 所示的  $H$  面内天线阵的阵函数仍为

$$f_N(\Psi) = \left| \frac{\sin \frac{N\Psi}{2}}{\sin \frac{\Psi}{2}} \right|$$

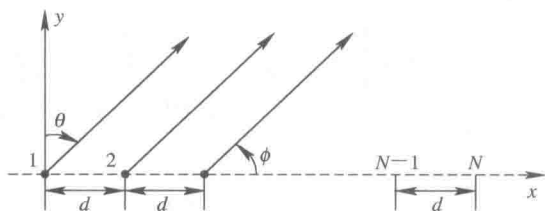


图 7-10  $N$  元均匀直线阵(二)

但是, 每个阵元在  $H$  面内却是无方向性的, 相当于一个点元, 所以在  $H$  面内天线阵的方向性函数就是阵函数, 即

$$F'(\phi) = f_N(\Psi) = \left| \frac{\sin \frac{N\Psi}{2}}{\sin \frac{\Psi}{2}} \right| \quad (7-64)$$

由上式可知, 当各个阵元的激励电流同相时,  $\beta=0$ ,  $\Psi=kd \cos \phi$ , 最大辐射条件  $\Psi=0$  对应于

$$\phi = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

换句话说, 在  $\phi=\pi/2$  和  $\phi=3\pi/2$  的方向上, 亦即在天线阵轴线垂直的方向上, 天线阵存在最大的辐射。这种各个阵元激励电流同相的均匀直线阵, 由于在天线阵轴线两侧有最大的辐射, 所以将其称为侧射式天线阵。图 7-11 画出了四元侧射式天线阵的方向图。

当  $\beta \neq 0$  时, 最大辐射条件  $\Psi=0$  对应于

$$\cos\phi = \cos\phi_m = -\frac{\beta}{kd}$$

此式表明天线阵的最大辐射方向  $\phi_m$  取决于相邻阵元之间的电流相位差  $\beta$ 。改变  $\beta$ , 就可以改变天线阵的最大辐射方向。这就是相控阵天线的工作原理。当  $\beta = -kd$  时, 最大辐射方向  $\phi_m = 0$ , 所以天线阵的最大辐射方向在其轴线方向上。这种均匀直线阵称为端射式天线阵。图 7-12 画出了八阵元端射式天线阵的方向图。

$d=\lambda/2$

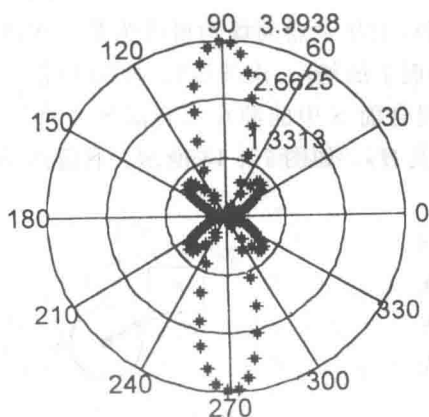


图 7-11 四阵元侧射式天线阵的方向图

$d=\lambda/4$

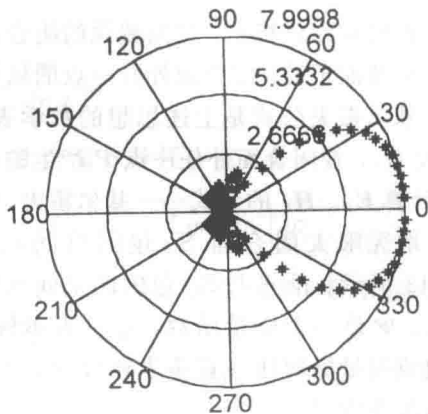


图 7-12 八阵元端射式天线阵的方向图

## 7.6 面天线的辐射场

长波、中波、短波和超短波段通常采用线天线, 但在微波波段一般不采用线天线, 而是采用面天线, 也称为口径天线。因为在微波波段, 波长很短(通常波长小于 1 m, 大于 1 mm), 如果采用线天线, 则在天线的加工、安装和调试上都会遇到许多困难, 有时甚至难以实现; 另一方面, 微波天线具有类似光学系统的特性。面天线广泛应用于微波中继通信、卫星通信、卫星电视广播以及雷达、导航等无线电系统中。

喇叭天线、抛物面天线和透镜天线是几种常用的面天线。面天线通常由初级辐射器和辐射口面两部分组成。初级辐射器又称为馈源, 用作初级辐射器的有终端开口的波导、喇叭天线、对称振子等。初级辐射器的作用是把馈线中传输的电磁能量转换为由辐射口面向外辐射的电磁能量。辐射口面的作用是把从初级辐射器获得的电磁能量按所要求的方向性向空间辐射出去。

严格求解面天线的辐射场, 就要根据天线的边界条件求解麦克斯韦方程组, 这在数学处理上相当复杂。工程上往往采用以下两种近似方法求解。

### 1. 感应电流法

这种方法是先求出天线的金属导体面在初级辐射器照射下产生的感应面电流分布, 然

后计算此电流在外部空间产生的辐射场。

## 2. 口面场法

这种方法包括两部分：先作一个包围天线的封闭面，求出此封闭面上的场(称为解内场问题)；然后根据惠更斯原理，利用该封闭面上的场求出空间的辐射场(称为解外场问题)。由于金属封闭面上无电磁场，故实际上只需考虑封闭面的开口部分的辐射作用，即口面场的辐射。

### 7.6.1 基尔霍夫公式

惠更斯原理指出，包围波源的闭合面(波阵面)上任一点的场均可认为是二次波源，它们产生球面子波，闭合面外任一点的场可由闭合面上的场(二次波源)的叠加决定。

基尔霍夫公式是上述思想的数学表述。设闭合面  $S$  中的源在闭合面  $S$  上产生的场为  $\mathbf{E}_S$  及  $\mathbf{H}_S$ ，在闭合面外任一点  $P$  产生的场为  $\mathbf{E}_P$  及  $\mathbf{H}_P$ ，如图 7-13 所示。下面推导由  $\mathbf{E}_S$ 、 $\mathbf{H}_S$  计算  $\mathbf{E}_P$ 、 $\mathbf{H}_P$  的公式——基尔霍夫公式。

取无限大闭合面  $S_\infty$  包围空间场域，如图 7-13 所示。设  $S$  与  $S_\infty$  包围的空间区域  $V$  是无源区。 $\Psi$  是一个标量函数，它可表示标量位、矢量位或矢量场的任一直角坐标分量，并满足齐次亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (7-65)$$

式中  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 。为方便起见，取  $P$  点为坐标原点( $r=0$ )。现引入另一标量函数  $G(r)$ ，它满足方程：

$$\nabla^2 G(r) + k^2 G(r) = -\delta(r) \quad (7-66)$$

可以证明，式(7-66)的解为

$$G(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (7-67)$$

标量函数  $G(r)$  称为标量格林函数，其物理意义为在  $r=0$  处的点源在距源点  $r$  处产生的标量场。

由上可见， $\Psi$  在  $V$  中具有二阶连续偏导数， $G(r)$  在  $V$  中除  $P$  点外也具有二阶连续偏导数。以  $P$  点为球心作半径为  $a$  的球面  $S_0$ ，它包围的空间区域为  $V_0$ 。在空间区域  $V-V_0$  中，标量函数  $\Psi$  和  $G(r)$  均具有二阶连续偏导数，因此它们满足格林定理式(7-3)，即

$$\int_{V-V_0} [\Psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Psi] dV = - \oint_{S+S_0+S_\infty} \left( \Psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \quad (7-68)$$

上式右边取负号是因为单位矢量  $\mathbf{n}$  的方向为空间区域  $V-V_0$  的内法线矢量。 $V-V_0$  的空间区域为  $\Psi$  和  $G(r)$  的无源区，因此式(7-68)左边的被积函数为

$$\Psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Psi = \Psi(-k^2 G) - G(-k^2 \Psi) = 0$$

故式(7-68)左边的体积分为零。而右边的面积分可分为三个面积分之和。已知场分量的振幅至少与距离  $r$  的一次方成反比，即  $G(r)$  与  $\frac{1}{r}$  成正比，所以当  $r \rightarrow \infty$  时， $\frac{\partial}{\partial n} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial r}$ 。因此面积分中的被积函数在  $r \rightarrow \infty$  时至少与  $r$  的三次方成反比，又由于  $S_\infty$  与  $r^2$  成正比，故当

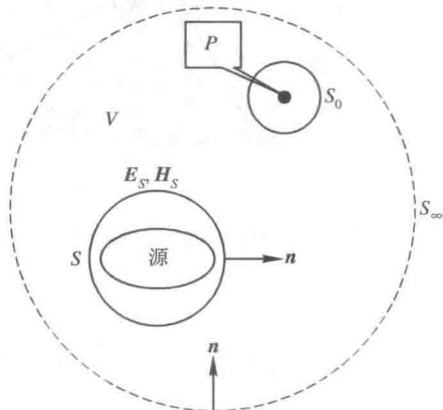


图 7-13 惠更斯原理

$r \rightarrow \infty$  时,  $S_\infty$  的面积分为零。 $S_0$  面上的面积分为

$$\begin{aligned} \oint_{S_0} \left( \Psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS &= \oint_{S_0} \left( \Psi \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) dS \\ &= \frac{\partial G}{\partial r} \bigg|_{r=a} \oint_{S_0} \Psi dS - G \bigg|_{r=a} \oint_{S_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} dS \end{aligned} \quad (7-69)$$

上式中第二项的面积分为

$$\oint_{S_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} dS = \oint_{S_0} \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS = \oint_{S_0} \nabla \Psi \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_0} \nabla^2 \Psi dV = - \int_{V_0} k^2 \Psi dV$$

当  $a \rightarrow 0$  时,  $V_0 \rightarrow 0$ , 式(7-69)第二项的极限为零, 第一项的极限为  $-\Psi(P)$ 。

于是, 由式(7-68)可得  $P$  点的标量场为

$$\Psi_P = \oint_S \left( \Psi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \quad (7-70)$$

当  $P$  点在  $r'$  点处时, 格林函数  $G = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ , 闭合面  $S$  外任一点  $r$  处, 有

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) - \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS \quad (7-71)$$

式中  $r'$  点在闭合面  $S$  上。式(7-71)被称为基尔霍夫公式, 它是惠更斯原理的数学形式。事实上, 上式只是所有源均在  $S$  之外时式(7-8)的特例。

电磁场的任一直角坐标分量都满足式(7-71), 所以三个直角坐标分量合成为矢量后, 可得矢量基尔霍夫公式为

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \mathbf{E}_s(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) - \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathbf{E}_s(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS \quad (7-72a)$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \mathbf{H}_s(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) - \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathbf{H}_s(\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS \quad (7-72b)$$

式中:  $\mathbf{r}$  为场点位置矢量, 场点在闭合面  $S$  外;  $\mathbf{r}'$  为闭合面  $S$  上的任意点的位置矢量;  $\mathbf{E}_s$ 、 $\mathbf{H}_s$  为闭合面  $S$  上的电磁场。由式(7-72)可见, 只要已知闭合面  $S$  上的电磁场, 就可以通过面积分求出闭合面外任一点的电磁场。

## 7.6.2 口径面的辐射场

设一天线的口径面上的电磁场的某一直角坐标分量  $\Psi_s$  已知, 在口径面上取一面元  $dS$ , 如图7-14所示, 将其称为惠更斯元。合适地选择坐标系, 使惠更斯元  $dS$  位于坐标原点, 其法线沿  $z$  轴。

设惠更斯元上场的传播方向为  $z$  方向, 那么惠更斯元上的场可以表示为

$$\Psi_s = \Psi_{S_0} e^{-jkz} \quad (7-73)$$

这样, 就有

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \bigg|_{z=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \bigg|_{z=0} = jk \Psi_{S_0} \quad (7-74)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \mathbf{e}_z \cdot \nabla \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) = -\cos\theta \left[ \frac{e^{-jkr}}{r} \left( jk + \frac{1}{r} \right) \right]$$

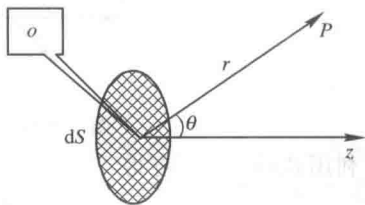


图 7-14 惠更斯元

对于远区场:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \approx -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos\theta \quad (7-75)$$

式中  $\theta$  为  $\mathbf{r}$  与  $z$  轴的夹角。将以上结果代入式(7-71), 可得惠更斯元的远区辐射场为

$$\Psi(\mathbf{r}) = -j \frac{\Psi_{S_0} dS}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) e^{-jkr} \quad (7-76)$$

由上式可得到位于  $\mathbf{r}'$  处的惠更斯元在  $\mathbf{r}$  点产生的场为

$$\Psi(\mathbf{r}) = -j \frac{\Psi_{S_0}(\mathbf{r}') dS'}{2\lambda |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (1 + \cos\theta') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (7-77)$$

式中  $\theta'$  为  $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$  与  $dS'$  的法线间的夹角。上式对整个口径面积分, 可得口径面  $S$  上的场在  $\mathbf{r}$  点产生的辐射场为

$$\Psi(\mathbf{r}) = -j \frac{1}{2\lambda} \int_S \frac{\Psi_{S_0}(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (1 + \cos\theta') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' \quad (7-78)$$

必须注意, 基尔霍夫公式中的积分面必须是闭曲面。如果采用它计算面天线的有限口径面的辐射场, 将会引入误差。这种误差在口径的轴线上是很小的, 偏离轴线误差将很快增大。

**例 7-8** 设一无限大金属平面位于  $z=0$  坐标平面, 其上开有口径为  $2a \times 2b$  的矩形孔。现在让我们来求一均匀平面波从  $-z$  向  $+z$  方向垂直投射到这块金属板上通过矩形口径时, 均匀同相矩形口径面的远区辐射场。

**解:** 设口径面位于  $z=0$  平面, 如图 7-15 所示。口径场的某一直角坐标分量为

$$E_S = E_{S_0} e^{-jkz}$$

式中  $E_{S_0}$  是常数。

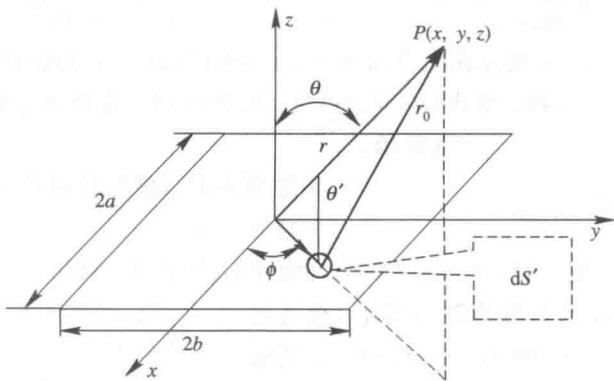


图 7-15 均匀同相矩形口径面的远区辐射场

利用式(7-78)可得

$$E_P = -j \frac{E_{S_0}}{2\lambda} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos\theta') dx' dy' \quad (7-79)$$

式中  $r$  为口径面上  $(x', y', 0)$  点到场点  $P(x, y, z)$  的距离:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2} \\ &= \sqrt{r_0^2 - 2xx' - 2yy' + x'^2 + y'^2} = r_0 \sqrt{1 - \frac{2}{r_0^2}(xx' + yy') + \left(\frac{x'}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y'}{r_0}\right)^2} \end{aligned}$$

上式中  $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  是坐标原点到场点  $P$  的距离。对于远区,  $r_0 \gg x'$ ,  $r_0 \gg y'$ , 上式可以近似为

$$r = r_0 \frac{xx' + yy'}{r_0}$$

当  $r_0 \gg a$ 、 $r_0 \gg b$  时, 可以近似取  $\theta \approx \theta'$ ,  $1/r \approx 1/r_0$ 。如果场点采用球坐标表示, 即取  $x = r_0 \sin\theta \cos\phi$ ,  $y = r_0 \sin\theta \sin\phi$ , 那么将以上关系代入式(7-79), 有

$$\begin{aligned} E_P(r_0, \theta, \phi) &= -j \frac{E_{S_0} e^{-jkr_0}}{2\lambda r_0} (1 + \cos\theta) \int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b e^{jk \sin\theta (x' \cos\phi + y' \sin\phi)} dy' \\ &= -j \frac{2abE_{S_0}}{\lambda r_0} (1 + \cos\theta) \cdot \frac{\sin(ka \sin\theta \cos\phi)}{ka \sin\theta \cos\phi} \cdot \frac{\sin(kb \sin\theta \sin\phi)}{kb \sin\theta \sin\phi} e^{-jkr_0} \end{aligned}$$

由上式可知, 均匀同相矩形口径场的方向性函数为

$$F(\theta, \phi) = (1 + \cos\theta) \cdot \frac{\sin(ka \sin\theta \cos\phi)}{ka \sin\theta \cos\phi} \cdot \frac{\sin(kb \sin\theta \sin\phi)}{kb \sin\theta \sin\phi} \quad (7-80)$$

由上可见, 最大辐射方向在  $\theta=0$  处, 此时

$$E_P = E_{P_{\max}} = j \frac{4abE_{S_0}}{\lambda r_0} e^{-jkr_0} \quad (7-81)$$

通过口径面的入射波的平均坡印廷矢量为  $\mathbf{S}_{av} = \frac{\mathbf{a}_z |E_{S_0}|^2}{2\eta}$ 。因为口径面上场量分布是均匀的, 所以通过口径面的总辐射功率为

$$P = |\mathbf{S}_{av}| \cdot 4ab = \frac{4ab |E_{S_0}|^2}{2\eta}$$

另一方面, 产生与式(7-80)相等电场的点源天线的总辐射功率为

$$P_0 = 4\pi r_0^2 \cdot \frac{|E_{P_{\max}}|^2}{2\eta} = \frac{32\pi a^2 b^2 |E_{S_0}|^2}{\eta \lambda^2}$$

将以上两式代入计算天线方向性系数的公式(7-40)中, 可得均匀激励的矩形口径面的方向性系数为

$$D = \frac{P_0}{P} \bigg|_{\text{相等电场强度}} = \frac{16\pi ab}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S$$

式中  $S=4ab$  代表口径的面积。上式是由口径面面积  $S$  和工作波长  $\lambda$  计算均匀同相激励口径面方向性系数的通用公式。

## 7.7 互易定理

互易定理是电磁场理论的基本定理之一, 有许多应用。它联系着两个场源及场源在空间区域和封闭面上产生的场。互易定理为证明电路理论中的线性网络参数的互易关系提供了理论基础; 利用互易定理还可以证明同一副天线具有相同的收发特性。

假设空间区域  $V_1$  中的电流源  $J_1$  产生的电磁场为  $E_1$  和  $H_1$ , 空间区域  $V_2$  中的电流源  $J_2$  产生的电磁场为  $E_2$  和  $H_2$ , 两电流源振荡在同一频率上, 且空间区域  $V_1$  和  $V_2$  及它们之外的空间区域  $V_3$  中的媒质是线性的。根据矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

有

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) = \mathbf{H}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{H}_2) \quad (7-82)$$

将上式代入麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}$$

得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) &= \mathbf{H}_2 \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}_1) - \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{J}_2 + j\omega\epsilon\mathbf{E}_2) \\ &= -j\omega(\mu\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 + \epsilon\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \end{aligned} \quad (7-83)$$

同理, 将上式的下标 1、2 对调, 可写出

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) &= \mathbf{H}_1 \cdot (-j\omega\mu\mathbf{H}_2) - \mathbf{E}_2 \cdot (\mathbf{J}_1 + j\omega\epsilon\mathbf{E}_1) \\ &= -j\omega(\mu\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 + \epsilon\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 \end{aligned} \quad (7-84)$$

用式(7-83)减去式(7-84)可得

$$\nabla \cdot [(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) - (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)] = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \quad (7-85)$$

将式(7-85)两边对体积  $V$  积分, 并根据散度定理把左边的体积分写成面积分, 可得

$$\oint_S [(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) - (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)] \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) \, dV \quad (7-86)$$

式中:  $S$  为包围空间区域  $V$  的封闭面;  $\mathbf{n}$  为  $S$  的外法向单位矢量。上式是洛伦兹互易定理 (Lorentz Reciprocity Theorem) 的积分形式, 也就是互易定理的一般表示式。由此式可导出若干特殊情况下的简化形式。

### 1. 洛伦兹互易定理

设两个电流源  $J_1$  和  $J_2$  均在空间区域  $V$  外, 则空间区域  $V$  内为无源空间, 因而式(7-86)右端的体积分等于零, 故其左边的封闭面积也等于零, 即

$$\oint_S [(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) - (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1)] \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (7-87)$$

上式是洛伦兹互易定理的简化形式。

### 2. 卡森互易定理

当  $V$  表示整个空间区域时,  $S$  为无限大的封闭面  $S_\infty$ , 且设两个电流源  $J_1$  和  $J_2$  均在空间区域  $V$  内, 如图 7-16 所示。

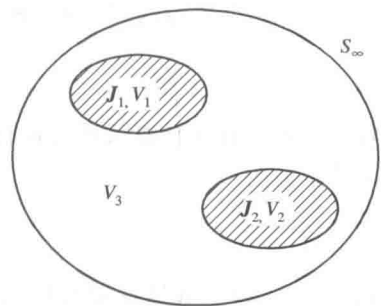


图 7-16 卡森互易定理用图

由于空间区域  $V_1$  中的电流源  $J_1$  产生电磁场  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{H}_1$ , 以及空间区域  $V_2$  中的电流源  $J_2$  产生电磁场  $\mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{H}_2$ , 且在包围  $V$  的无限大的封闭面  $S_\infty$  上电磁场趋于零, 所以式(7-86)左边的面积分等于零。从而得

$$\int_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) \, dV = \int_{V_1+V_2+V_3} (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) \, dV = 0$$

即当两个电流源均在  $V$  时, 仍然有下式成立:

$$\int_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) \, dV = 0 \quad (7-88)$$

注意到空间区域  $V_3$  为无源区, 因此



$$\int_{V_3} (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2) dV = 0$$

综上所述:

$$\int_{V_1} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 dV = \int_{V_2} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 dV \quad (7-89)$$

这是最有用的互易定理形式,称为卡森(J. R. Carson)形式的互易定理。它反映了两个场源与其场之间的互易关系。这种互易性源自线性媒质中麦克斯韦方程的线性性质。

一个天线用作发射和用作接收时,其方向图、增益和输入阻抗都是相同的。下面我们应用卡森互易定理来说明收、发天线方向图的互易性。

如图 7-17 所示,在图 7-17(a)情况下,设天线 1 的输入端以电压源  $U_1$  激励,其上电流为  $I_{11}$ ;天线 2 输入端短路,其上电流为  $I_{21}$ ,电流  $I_{11}$  和  $I_{21}(\mathbf{J}_1)$  在空间产生的电磁场为  $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{H}_1$ 。

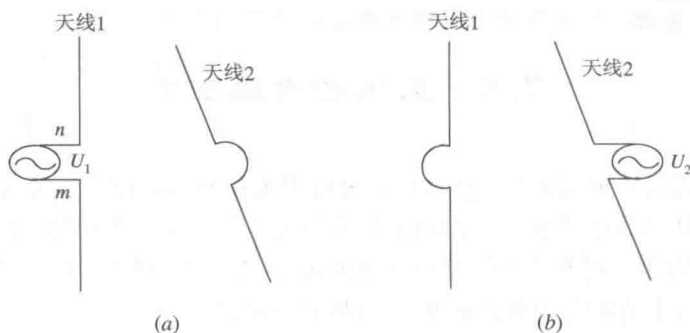


图 7-17 天线互易性的说明图

在图 7-17(b)情况下,将激励源与短路对换,即设天线 2 的输入端以电压源  $U_2$  激励,其上电流为  $I_{22}$ ;天线 1 输入端短路,其上电流为  $I_{12}$ ,电流  $I_{22}$  和  $I_{12}(\mathbf{J}_2)$  在空间产生的电磁场为  $\mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{H}_2$ 。由卡森互易定理知,两种情况下的源与场的关系为

$$\int_V \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 dV = \int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 dV$$

当天线为细导线时,对于线电流,  $\mathbf{J} dV = I d\mathbf{l}$ , 从而上式变为

$$\int_{l_1+l_2} I_2 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1+l_2} I_1 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{即} \quad \int_{l_1} I_{12} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{l_2} I_{22} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \int_{l_1} I_{11} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{l_2} I_{21} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2$$

如果天线为理想导体,其上电场切向分量为零,则上式左边第二项积分和右边第一项积分为零;在  $l_1$  上除输入端  $mn$  处的  $\int_n^m \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = U_1$  外电场切向分量仍为零,在  $mn$  段有由天线 2 上电压  $U_2$  产生的短路电流  $I_2 = I_{12}$ 。因此上式左边应等于  $I_{12}U_1$ 。同理,该式右边等于  $I_{21}U_2$ 。于是

$$I_{12}U_1 = I_{21}U_2$$

令天线 1 对天线 2 的互导纳为  $Y_{12} = I_{12}/U_2$ , 天线 2 对天线 1 的互导纳为  $Y_{21} = I_{21}/U_1$ , 则上式可写为

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (7-90)$$

如果天线 1 用作发射天线, 天线 2 用作接收天线, 则当天线 2 在以天线 1 为中心的球面上移动时, 天线 2 上测得的短路电流  $I_{21}$  的大小应正比于天线 1 的发射方向性函数, 于是

$$I_{21}(\theta, \phi) = Y_{21}U_1 = K_1 f_{\text{发}}(\theta, \phi)$$

同理, 天线 2 用作发射天线, 天线 1 用作接收天线时, 天线 1 上测得的短路电流  $I_{12}$  的大小应正比于天线 1 的接收方向性函数, 于是

$$I_{12}(\theta, \phi) = Y_{12}U_2 = K_2 f_{\text{收}}(\theta, \phi)$$

考虑到式(7-90), 且取  $U_1 = U_2$ , 则由上式可见:

$$f_{\text{发}}(\theta, \phi) = f_{\text{收}}(\theta, \phi)$$

上式表明天线 1 用作发射天线与用作接收天线时的方向性函数相同, 也就是说天线的发射方向图与接收方向图相同。

此外, 还可由互易定理证明同一天线用作发射和接收时, 尚有其它相同的性质。这将在后续课程中介绍。

## 7.8 天线的有效面积

一般地说, 天线既可用来发射电磁波, 也可用来接收电磁波。当天线用于接收电磁波时, 接收天线能从来波中获取多大的功率是人们关心的一个主要问题。接收天线的一个重要参量就是有效面积, 它表示接收天线吸收到达的电磁波的能力。定义天线最大可接收功率(实功率)  $P_{\text{RM}}$  与来波的实功率流密度  $S_i$  有如下关系:

$$P_{\text{RM}} = A_e S_i \quad (7-91)$$

式中比例系数  $A_e$  具有面积的量纲, 因而称为有效面积(Effective Area)。

图 7-18 为接收天线的等效电路,  $U_r$  为接收电动势,  $Z_{\text{in}} = R_{\text{in}} + jX_{\text{in}}$  为接收天线的内阻抗,  $Z_L = R_L + jX_L$  为接收天线所接负载阻抗。当接收天线的内阻抗与接收天线所接负载阻抗共轭匹配时, 即  $Z_L = Z_{\text{in}}^*$ , 负载获得最大接收功率:

$$I_{\text{in}} = \frac{U_r}{Z_{\text{in}} + Z_L} = \frac{U_r}{2R_{\text{in}}}$$

$$P_{\text{RM}} = \frac{1}{2} I_{\text{in}}^2 R_L = \frac{1}{2} \frac{U_r^2}{4R_{\text{in}}^2} R_{\text{in}} = \frac{U_r^2}{8R_{\text{in}}}$$

从而得

$$A_e = \frac{P_{\text{RM}}}{S_i} = \frac{U_r^2}{8R_{\text{in}} \cdot S_i} \quad (7-92)$$

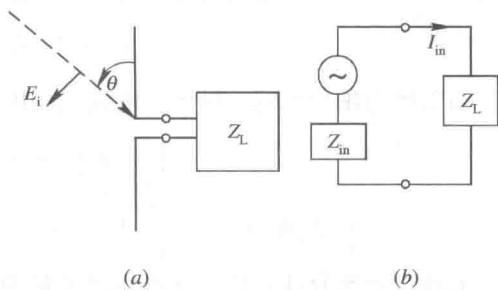


图 7-18 接收天线的等效电路

对于长为  $l$  的电基本阵子(电流元), 当入射波电场强度为  $E_i$  时, 接收天线所感应的最大接收电动势为

$$U_r = E_i l \sin\theta = E_i l$$

上式中已经考虑了电基本阵子的最大接收方向, 即最大接收电动势的值对应于  $\theta = 90^\circ$ 。再计算其输入阻抗(利用互易定理可以证明, 天线作发射用和作接收用时输入阻抗相同):

$$R_{\text{in}} = R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

从而得到

$$A_e = \frac{(E_i l)^2}{8 \times 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \times \left(\frac{E_i^2}{240\pi}\right)} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 \quad (7-93)$$

设电基本阵子的辐射效率  $\eta_r = 1$ , 那么对于电基本阵子, 有

$$G = D\eta_r = \frac{3}{2} \quad (7-94)$$

比较式(7-93)和式(7-94)得天线增益与天线有效面积的关系如下:

$$\frac{G}{A_e} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{8\pi} \lambda^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \quad (7-95)$$

虽然上式是以电基本阵子为例导出的, 但是可以证明, 这一关系对任何天线都成立。

设天线在与其最大接收方向垂直的截面上的几何面积为  $A$ , 那么定义该几何面积与天线有效面积  $A_e$  间的关系如下:

$$A_e = A \cdot e_a \quad (7-96)$$

式中  $e_a$  称为天线效率。由式(7-95)和式(7-96)得

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e = \frac{4\pi}{\lambda^2} A \cdot e_a \quad (7-97)$$

这一关系表明, 天线的电有效面积  $A_e/\lambda^2$  愈大, 则天线的增益愈高。如果保持天线效率  $e_a$  不变, 则天线几何面积愈大, 天线增益愈高。

## 7.9 传输方程

天线通过馈线系统(传输系统)和发射机或者接收机相连。发射电磁波时天线从发射机得到功率并将其辐射至空间, 因此, 发射天线相对于发射机是一个负载。接收时, 天线把从空间收集到的电磁能量输送给接收机, 故接收天线相对于接收机则是一个信号源。下面我们研究图 7-19 所示的无线电通信线路的功率传输关系。

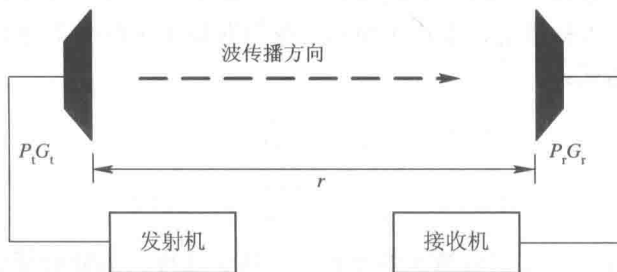


图 7-19 无线电通信线路示意图

设发射机传输给发射天线的功率(天线的输入功率)为  $P_t$ , 若发射天线把这个功率均匀地、无方向地辐射出去, 则在离发射天线距离为  $r$  的地方, 其平均功率密度  $S_0$  为

$$S_0 = \frac{P_t}{4\pi r^2} \quad (7-98)$$

如果发射天线的增益为  $G_t$ , 则根据增益的定义可知, 同一距离最大方向上的功率密度为

$$S_{\max} = G \cdot S_0 = \frac{G_t P_t}{4\pi r^2} \quad (7-99)$$

即发射天线最大辐射方向指向相距为  $r$  的接收天线时, 发射天线在接收天线处产生的功率密度。

设接收天线增益为  $G_r$ , 其最大接收方向也指向发射天线, 因而它能收到的最大接收功率(考虑了天线有效面积的定义)为

$$P_{\text{RM}} = A_e S_{\max} = \frac{G_r}{4\pi} \cdot \frac{G_t P_t}{4\pi r^2} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 P_t G_t \cdot G_r \quad (7-100)$$

式(7-100)称为弗里斯(Friis)传输方程。

工程实践中, 通常采用分贝来表示式(7-100), 即

$$P_{\text{RM}}(\text{dBm}) = P_t(\text{dBm}) + G_t(\text{dB}) + G_r(\text{dB}) - 20 \lg r(\text{km}) - 20 \lg f(\text{MHz}) - 32.44$$

上式中  $P(\text{dBm})$  是相对于 1 mW 的功率分贝数:

$$P(\text{dBm}) = 10 \lg \frac{P(\text{mW})}{1 \text{ mW}}$$

**例 7-9** 设图 7-19 中发射天线和接收天线都是半波振子, 工作频率为 200 MHz。若发射天线输入功率为 1 kW, 则在  $r=500 \text{ km}$  处的接收天线所能收到的最大功率为多大?

**解:** 根据题意有

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8} = 1.5$$

由式(7-100)得

$$P_{\text{RM}} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 P_t G_t G_r = \left(\frac{1.5}{4\pi \times 5 \times 10^5}\right)^2 \times 10^3 \times (1.64)^2 = 1.53 \times 10^{-10} \text{ W}$$

### 小 结

(1) 时变电荷和电流产生时变电磁场, 电磁场能量可以脱离波源向远处传播。这种现象称为电磁辐射。引入标量电位和磁矢位后, 我们获得了由时变电荷和电流确定标量电位  $\varphi$  和磁矢位  $\mathbf{A}$  的表达式:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} e^{-j\omega(t-\frac{R}{v})} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} e^{-j\omega(t-\frac{R}{v})} dV' \end{aligned}$$

利用上式可求解天线电流在空间激发的电磁波。基于这种位函数的滞后, 我们把标量电位  $\varphi$  和磁矢位  $\mathbf{A}$  均称为滞后位。它们的值是由时间提前的源决定的, 滞后的时间是电磁波传播所需要的时间。

如果时间  $R/v$  足够小, 以至在所讨论区域内可以忽略, 即忽略传播效应, 则此区域内的场就是似稳场。电路理论正是建立在似稳场的基础上的。

(2) 利用滞后位可以计算电基本振子的辐射场, 由此可绘制出它的方向图, 推导其辐

射功率、辐射电阻、方向性系数和增益等参量。

(3) 采用与求电基本振子辐射场相类似的方法, 推导出了磁基本振子的辐射场。电、磁基本振子的辐射场均为 TEM 非均匀球面波。电磁场的对偶原理提供了解决电磁对偶问题的另一种方法, 利用对偶原理确定磁基本振子的辐射场更简单。

(4) 辐射和接收电磁能量的装置称为天线。为了评价一副天线的技术性能优劣, 必须规定一些能够表征天线性能的参数。这些参数主要是方向性函数和方向图、方向性系数、辐射效率、增益系数、输入阻抗和极化形式等。

(5) 辐射体由横截面半径远小于波长的金属导线构成的天线, 称为线天线。线天线是由许许多多电基本振子组成的。由各个电基本振子产生的辐射场的叠加, 可以求出线天线的辐射场。叠加必须考虑各个电基本振子产生的辐射场之间在空间和时间上的相互关系, 进而确定表征其性能的各参数。

天线阵或阵列天线是以一定规律排列的相同天线的组合。组成天线阵的独立单元称为阵元或天线单元。如果阵元排列在一直线上或一平面上, 则称为直线阵或平面阵。可以利用叠加原理求出天线阵的方向图。由相同形式和相同取向的天线单元组成的天线阵, 它的方向图是天线单元的方向图乘上阵因子。

(6) 微波波段一般不采用线天线, 而是采用面天线, 也称为口径天线。喇叭天线、抛物面天线和透镜天线是几种常用的面天线。面天线通常由初级辐射器和辐射口面两部分组成。初级辐射器又称为馈源, 用作初级辐射器的有终端开口的波导、喇叭天线、对称振子等。初级辐射器的作用是把馈线中传输的电磁能量转换为由辐射口面向外辐射的电磁能量。辐射口面的作用是把从初级辐射器获得的电磁能量按所要求的方向性向空间辐射出去。

根据基尔霍夫公式, 用一闭合面把辐射源包围起来, 闭合面外任意一点的场, 可以由此闭合面上的场量和它的法向导数分别来求解。许多面天线的辐射问题可以利用这一公式得到解决。

(7) 互易定理是电磁场理论的基本定理之一, 有许多应用, 它联系着两个场源及场源在空间区域和封闭面上产生的场。互易定理为证明电路理论中的线性网络参数的互易关系提供了理论基础。利用互易定理还可以证明同一副天线具有相同的收发特性。

## 习 题 七

7-1 距离电偶极子多远的地方, 其电磁场公式中与  $r$  成反比的项等于与  $r^2$  成反比的项。

7-2 假设一电偶极子在垂直于它的轴线的方向上距离 100 km 处所产生的电磁强度的振幅等于  $100 \mu\text{V/m}$ , 试求电偶极子所辐射的功率。

7-3 计算一长度等于  $0.1\lambda$  的电偶极子的辐射电阻。

7-4 假设坐标原点上有一电矩为  $\mathbf{p} = e_z p$  的电偶极子和磁矩为  $\mathbf{m} = e_z m$  的磁偶极子天线。问什么条件下两天线所辐射的电磁波在远区相叠加为一圆极化电磁波?

7-5 推导磁偶极子天线的辐射功率公式。

7-6 试计算电偶极子和半波振子的方向性系数。

7-7 已知某天线的辐射功率为 100 W, 方向性系数  $D=3$ 。

(1) 求  $r=10\text{ km}$  处最大辐射方向上的电场强度振幅。

(2) 若保持辐射功率不变, 要使  $r=20\text{ km}$  处的场强等于原来  $r=10\text{ km}$  处的场强, 应选取方向性系数  $D$  等于多少的天线。

7-8 设电基本振子的轴线沿东西方向放置, 在远方有一移动接收电台在正南方向而接收到最大电场强度。当接收电台沿电基本振子为中心的圆周在地面上移动时, 电场强度将逐渐减少。试问当电场强度减少到最大值的  $1/\sqrt{2}$  时, 接收电台的位置偏离正南方向多少度。

7-9 两个半波振子天线平行放置, 相距  $\lambda/2$ 。若要求它们的最大辐射方向在偏离天线阵轴线  $\pm 60^\circ$  的方向上, 问两个半波振子天线馈电电流相位差应为多少。

7-10 大小分别为  $I_1 l_1$ 、 $I_2 S_2$  的电基本振子和磁基本振子同频率、同方向, 并放置在同一点, 求辐射电场。

7-11 计算矩形均匀同相口径天线的方向性系数及增益。

7-12 利用互易定理证明紧靠理想导体表面上的切向电流元无辐射场。

7-13 无限大理想导体平面上方距平面  $h$  处垂直放置一半波振子天线, 求远区辐射场及其方向因子。

### 综合性拓展练习题

1. 推导并绘制一个半波长正交偶极子天线方向图 ( $2D$ 、 $3D$ ) 和三个半波长正交偶极子天线方向图 ( $2D$ 、 $3D$ )。

2. 探求天线的有效面积在电磁散射方面的应用实例。

3. 研究传输方程的雷达工程应用。

4. 简述新型高功率微波武器的发展与研究现状。

5. 寻求拥挤电磁环境下的宽带软件无线电技术。

## 第八章 导行电磁波

在第六章中我们讨论了电磁波在无限空间传播和在分界面上电磁波反射与折射的问题，在第七章中我们讨论了作为电磁波的振荡源——天线的辐射场强、方向性、辐射功率以及效率的问题。电磁波除了在无限空间或半无限空间遵循某种规律传播外，还可以沿着某种装置传输，这种装置起着引导电磁波传输的作用，这种电磁波称为导行电磁波，该装置称为导波装置。导波装置可以由某种形状的金属材料构成，也可以由某种形状的介质材料构成，还可以由某种形状的金属和介质构成。在此我们仅讨论直行的均匀导波装置。所谓直行，是指导波装置不弯曲、无分支；所谓均匀，是指在垂直于电磁波传输方向上的横截面上，导波装置具有相同的截面形状和截面面积。无限长的平行双导线、同轴线、金属波导、介质波导以及微带传输线等等都是常用的导波装置。

在不同的导波装置上可以传输不同模式的电磁波。所谓不同模式的电磁波，就是在垂直于电磁波传输方向的横截面上具有不同的场分布，每一种场分布称为一种模式。不同模式的电磁波是由求解满足特定边界条件的亥姆霍兹方程所决定的。根据这些分析，我们可以得到在各种导波装置中各种模式电磁波传输的规律，由此可以对导波装置提出合理的设计要求，以便使导波装置更好地传输电磁波。

如果我们把一段导波装置的两端短路，电磁波在这段导波装置来回反射形成电磁振荡，这段被短路的导波装置称为谐振腔，它在微波技术中有重要的应用。本章主要讨论的内容有：

- 沿均匀导波装置传输电磁波的基本特性
- 矩形波导及其传输特性
- 圆柱形波导及其传输特性
- 同轴线及其传输特性
- 谐振腔

### 8.1 沿均匀导波装置传输电磁波的一般分析

在导波装置中，电磁场的表达式可以满足导波装置特点的边界条件的麦克斯韦方程组的解。对于均匀导波装置来说，通常有两种分析方法，这就是纵向场法和赫兹矢量法。

由麦克斯韦方程组导出电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{H}$  所满足的矢量亥姆霍兹方程。根据导波装置

横截面的形状和尺寸沿电磁波传输方向(即导波装置轴向方向)不变的特点,从  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  所满足的矢量亥姆霍兹方程中分离出只含电场纵向分量和只含磁场纵向分量的标量亥姆霍兹方程。应用导波装置的边界条件求出电场和磁场的纵向分量,再根据麦克斯韦方程组给出的电场和磁场纵向分量与电场和磁场的横向分量的关系求出电磁场全部的横向分量。这就是求解导波装置中电磁场的纵向场法。

由麦克斯韦方程组引出赫兹电矢量  $\mathbf{II}_e$  和赫兹磁矢量  $\mathbf{II}_m$ ,建立起关于这两个赫兹矢量的矢量亥姆霍兹方程。根据导波装置横截面的形状选取合适的坐标系和具有合适方向的赫兹矢量,把关于赫兹矢量的矢量亥姆霍兹方程简化为标量亥姆霍兹方程。解此方程就可以求出赫兹矢量,通过赫兹矢量就可确定导波装置中的电磁场各分量的表达式。这就是求解导波装置中电磁场的赫兹矢量法。本章我们只介绍纵向场法,关于赫兹矢量法读者可参阅黄宏嘉所著的《微波原理》一书。

### 8.1.1 在导波装置中电磁场纵向场分量与横向场分量间的关系

在无耗的媒质中电磁波沿  $+z$  方向传输,则对于角频率  $\omega$  的正弦电磁波,它满足无源区域的麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (8-1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (8-1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (8-1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8-1d)$$

采用广义坐标系  $(u_1, u_2, z)$  (其中  $u_1$  和  $u_2$  为导波装置横截面上的坐标,  $z$  为纵向坐标),场强的纵向分量用  $\mathbf{E}_z(u_1, u_2, z)$  和  $\mathbf{H}_z(u_1, u_2, z)$  来表示,场强的横向分量用  $\mathbf{E}_t(u_1, u_2, z)$  和  $\mathbf{H}_t(u_1, u_2, z)$  表示,则场强矢量可表示为

$$\mathbf{E}(u_1, u_2, z) = \mathbf{E}_t(u_1, u_2, z) + \mathbf{E}_z(u_1, u_2, z) = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z$$

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, z) = \mathbf{H}_t(u_1, u_2, z) + \mathbf{H}_z(u_1, u_2, z) = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z$$

将上式代入式(8-1a)和式(8-1b)可得

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon\mathbf{E}_z \quad (8-2a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_z + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon\mathbf{E}_t \quad (8-2b)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = -j\omega\mu\mathbf{H}_z \quad (8-2c)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_z + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\mathbf{H}_t \quad (8-2d)$$

式中:  $\mathbf{e}_z$  是坐标  $z$  方向的单位矢量;  $\nabla_t$  是横向微分算子。对式(8-2)进行变换整理,可得

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E}_t = \frac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z + j\omega\mu\mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z \quad (8-3a)$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{H}_t = \frac{\partial}{\partial z}\nabla_t H_z + j\omega\epsilon\mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z \quad (8-3b)$$

对式(8-1a)和式(8-1b)两边取旋度并进行变换整理,可得各场量所满足的矢量及标量亥姆霍兹方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E}_t + k^2 \mathbf{E}_t = \mathbf{0}, \quad \nabla^2 \mathbf{H}_t + k^2 \mathbf{H}_t = \mathbf{0} \quad (8-4a)$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0, \quad \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \quad (8-4b)$$



式中  $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$  为电磁波在无限媒质中的波数。由分离变量法可知, 式(8-4b)中的  $E_z$  和  $H_z$  的解, 可表示为  $f(u_1, u_2)e^{-\gamma z}$  的形式, 其中  $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}$  称为导行电磁波的传输常数。这样横向场分量与纵向场分量间的关系可表示成

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{k_c^2}(-\gamma \nabla_t E_z + j\omega\mu \mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z) \quad (8-5a)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{k_c^2}(-\gamma \nabla_t H_z - j\omega\mu \mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z) \quad (8-5b)$$

及

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t + k_c^2 \mathbf{E}_t = \mathbf{0}, \quad \nabla_t^2 \mathbf{H}_t + k_c^2 \mathbf{H}_t = \mathbf{0} \quad (8-5c)$$

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0, \quad \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (8-5d)$$

将广义柱坐标系中的  $\nabla_t$  算子代入, 可得横向场分量的表达式为

$$E_{u_1} = \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u_1} - \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial u_2} \quad (8-6a)$$

$$E_{u_2} = \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial u_2} + \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u_1} \quad (8-6b)$$

$$H_{u_1} = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u_1} + \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial u_2} \quad (8-6c)$$

$$H_{u_2} = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial u_2} - \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u_1} \quad (8-6d)$$

式中  $h_1, h_2$  为拉梅系数。在直角坐标系中,  $h_1 = h_2 = 1$ , 在圆柱坐标系中,  $h_1 = 1, h_2 = r$ 。式(8-6)就是所求的横向场分量与纵向场分量之间的关系式, 这样只需求出标量  $E_z$  和  $H_z$  的亥姆霍兹方程式(8-5d)的解, 就可以求出所有场分量, 从而使问题大为简化。

### 8.1.2 导行波波型的分类

导行波的波型是指能够单独在导波系统中存在的电磁场结构的形式, 也称传输模式。从上面的分析可知, 导行波横向场分量只与纵向场分量有关, 因此可根据导行波中是否存在纵向场分量, 对导行波进行分类。

#### 1. 横电磁波(TEM波)

此传输模式没有电磁场的纵向场量, 即  $E_z = H_z = 0$ 。由式(8-6)可知, 要使  $\mathbf{E}_t$  和  $\mathbf{H}_t$  不为零, 必须有  $k_c = 0$ , 即

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = j\beta = jk_z \quad (8-7)$$

此时导波场的求解不能用上述纵向场法。将  $k_c = 0, E_z = 0, H_z = 0$  代入式(8-2)和式(8-5), 可得

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = \mathbf{0}, \quad \nabla_t^2 \mathbf{E}_t = \mathbf{0} \quad (8-8a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = \mathbf{0}, \quad \nabla_t^2 \mathbf{H}_t = \mathbf{0} \quad (8-8b)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{\eta} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (8-8c)$$

这就是 TEM 波的存在条件。它表明: 横电磁波在导波系统横截面上的场分布与相同条件下静止场的分布形式一样。这说明只有能够建立静止场的导波系统, 才能传输 TEM 波。

因此 TEM 波模式只能存在于多导体传输系统中,其场的求解可看成二维静止场问题的求解,即将横向电场  $E_t$  用标量电位  $\varphi(u_1, u_2)$  的横向梯度表示,求  $\varphi$  的二维拉普拉斯方程的解,就可求出各横向场分量。

## 2. 横电波(TE 波)或磁波(H 波)

横电波的特征是  $E_z=0, H_z \neq 0$ , 所有的场分量可由纵向磁场分量  $H_z$  求出。

## 3. 横磁波(TM 波)或电波(E 波)

横磁波的特征是  $H_z=0, E_z \neq 0$ , 所有的场分量可由纵向电场分量  $E_z$  求出。

在某些特殊场合,单独用 TE 波或 TM 波不能满足所有的边界条件,但它们的线性组合总能满足这些特殊要求,并且提供一个完整而普遍的解,这时的波称为混合波。当然还有别的分类方法,但按上述方法分类的三种波型是最实用的。

### 8.1.3 导行波的传输特性

#### 1. 截止波长与传输条件

导行波的场量都有因子  $e^{-\gamma z}$  (沿  $+z$  轴方向传输),  $\gamma=\alpha+j\beta$ , 为传播常数。由前面的推导可知

$$\gamma^2 = k_c^2 - k^2 \quad (8-9a)$$

对于理想导波系统,  $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$  为实数, 而  $k_c$  是由导波系统横截面的边界条件决定的, 也是实数。这样随着工作频率的不同,  $\gamma^2$  可能有下述三种情况:

(1)  $\gamma^2 < 0$ , 即  $\gamma=j\beta$ 。此时导行波的场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(u_1, u_2) e^{j(\omega t - \beta z)}$$

这是沿  $+z$  轴方向无衰减传输的行波, 故称其为传输状态。

(2)  $\gamma^2 > 0$ , 即  $\gamma=\alpha$ 。此时导行波的场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(u_1, u_2) e^{-\alpha z} e^{j\omega t}$$

显然这不是传输波, 而是沿  $z$  轴以指数规律衰减的, 称其为截止状态。

(3)  $\gamma=0$ 。这是介于传输与截止之间的一种状态, 称其为临界状态, 它是决定电磁波能否在导波系统中传输的分水岭。这时由  $k_c^2=k^2$  所决定的频率( $f_c$ )和波长( $\lambda_c$ )分别称为截止频率和截止波长, 并且有

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c} \quad (8-9b)$$

其中:  $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  为无限介质中电磁波的相速度;  $k_c$  称为截止波数, 并有

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (8-9c)$$

这样导波系统传输 TE 波和 TM 波的条件为

$$f > f_c \quad \text{或} \quad \lambda < \lambda_c \quad (8-9d)$$

截止条件为

$$f < f_c \quad \text{或} \quad \lambda > \lambda_c \quad (8-9e)$$

对于 TEM 波, 由于  $k_c=0$ , 即  $f_c=0, \lambda_c=\infty$ , 因此在任何频率下, TEM 波都能满足

$f > f_c = 0$  的传输条件, 均是传输状态。也就是说 TEM 波不存在截止频率。

## 2. 波导波长

理想导波装置中的相波长称为波导波长, 并记为  $\lambda_g$ 。这样, 根据相波长的定义可知

$$k_z = \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \text{或} \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k_z} \quad (8-10a)$$

在传输状态下,  $\gamma = j\beta = jk_z$ , 代入式(8-9a)得

$$k_z = \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = k \sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k^2}} \quad (8-10b)$$

将  $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$  代入上式得

$$k_z = \beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (8-10c)$$

所以可得

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_0 / \sqrt{\mu_r \epsilon_r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2 \left(\frac{1}{\mu_r \epsilon_r}\right)}} \quad (8-10d)$$

式中  $\lambda_0$  为自由空间的工作波长。

对于 TEM 波,  $\lambda_c = \infty$ , 由式(8-10d)可得

$$\lambda_g = \lambda_p = \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (8-10e)$$

式(8-10d)给出了  $\lambda_g$ 、 $\lambda$  和  $\lambda_c$  三者之间的关系。 $\lambda_c$  与导波系统的截面形状尺寸有关, 可以由边界条件求出。

## 3. 相速、群速和色散

(1) 相速。根据相速的定义及其一般公式  $v_p = \frac{\omega}{\beta}$ , 将式(8-10c)代入可得 TE 波和 TM 波相速的公式:

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (8-11a)$$

式中:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

对于 TEM 波( $\lambda_c \rightarrow \infty$ ), 有

$$v_p = v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (8-11b)$$

显然 TE 波和 TM 波的相速是大于光速(或介质中的光速)的。根据相对论, 任何物质的运动速度都不能超过光速, 但相速所描述的是波的等相位面移动的速度, 不是能量传播的速度。因而 TE 波和 TM 波相速不是物质真实运动的速度, 所以和相对论并不矛盾。

(2) 群速。群速是指一群具有相近的  $\omega$  和  $k_z$  的波群在传输过程中的“共同”速度, 或者说是已调波包络的速度。从物理概念上来看, 这种速度就是能量的传播速度, 其一般公

式为

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (8-11c)$$

由式(8-10b)可知,  $k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2}$ , 代入上式可得群速  $v_g$  为

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (8-11d)$$

可见, 群速  $v_g < v$ , 并且

$$v_g \cdot v_p = v^2 \quad (8-11e)$$

对于 TEM 波( $\lambda_c \rightarrow \infty$ ), 有

$$v_g = v_p = v \quad (8-11f)$$

(3) 色散。由式(8-11a)和式(8-11d)可知, TE 波和 TM 波的相速和群速都随波长(即频率)而变化, 称此现象为“色散”。因此 TE 波和 TM 波(即非 TEM 波)称为“色散”波, 而 TEM 波的相速和群速相等, 且与频率无关, 称为“非色散”波。

#### 4. 波阻抗

导波系统中, 传输模式沿传输方向成右手螺旋关系的横向电场与横向磁场之比称为导行波的波阻抗。由式(8-6)可得 TE 波和 TM 波的波阻抗为

$$Z_{TE} = \frac{E_{u_1}}{H_{u_2}} = \frac{-E_{u_2}}{H_{u_1}} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{k}{\beta} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (8-12a)$$

$$Z_{TM} = \frac{E_u}{H_v} = \frac{-E_v}{H_u} = \frac{\beta}{\omega \epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\beta}{k} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (8-12b)$$

对于 TEM 波, 有

$$Z_{TEM} = \eta = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (8-12c)$$

#### 5. 传输功率

导波沿无耗规则导行系统  $z$  方向传输的平均功率为

$$\begin{aligned} P_0 &= \operatorname{Re} \left[ \int_S \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_S (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot \mathbf{e}_z dS \right] \\ &= \frac{1}{2 |Z|} \int_S |\mathbf{E}_t|^2 dS = \frac{|Z|}{2} \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS \end{aligned} \quad (8-13)$$

式中  $Z = Z_{TE}$  (或  $Z_{TM}$  或  $Z_{TEM}$ )。

若考虑低耗情况下导行装置的损耗, 上述功率公式仅需乘以  $\exp(-2\alpha z)$ 。

#### 8.1.4 模式电压与模式电流

对传输模式的求解, 可采用纵向分量法, 也可采用横向分量的辅助标位函数法。它们本质上是一样的。这是因为标位函数也满足标量亥姆霍兹方程, 该方程的变量是可以分离的, 而横向场分量与电压电流有关, 因此下面用横向场分量的辅助标位函数, 导出 TM、

TE、TEM 波型的广义传输线方程及模式电压和模式电流的概念。

### 1. TM 波

TM 波型磁场的纵向分量  $H_z=0$ ，代入式(8-2c)得  $\nabla_t \times \mathbf{E}_t = \mathbf{0}$ 。因为任何标量函数梯度的旋度恒等于零，所以可令横向电场  $\mathbf{E}_t$  为

$$\mathbf{E}_t = -\nabla_t \varphi(u_1, u_2, z) \quad (8-14a)$$

$\varphi$  称为导波中的电位函数，可写成下述形式：

$$\varphi(u_1, u_2, z) = U(z)\varphi(u_1, u_2) \quad (8-14b)$$

将上式代入式(8-2a)、式(8-2b)，便可得到 TM 波各场分量的基本关系式为

$$\mathbf{E}_t = -U(z)\nabla_t \varphi(u_1, u_2) \quad (8-15a)$$

$$\mathbf{H}_t = I(z)\nabla_t \varphi(u_1, u_2) \times \mathbf{e}_z \quad (8-15b)$$

$$E_z = -\frac{I(z)}{j\omega\epsilon}\nabla_t^2 \varphi(u_1, u_2)$$

式中：

$$I(z) = -\int j\omega\epsilon U(z)dz \quad (8-15c)$$

式(8-15)表明，求解  $\mathbf{E}_t$ 、 $\mathbf{H}_t$  及  $E_z$  的问题，可归结为求解纵向分布函数  $U(z)$ 、 $I(z)$  及横向分布函数  $\varphi(u_1, u_2)$  的问题。纵向分布函数  $U(z)$ 、 $I(z)$  具有明确的物理意义。 $U(z)$  表示电位函数  $\varphi$  沿波传播方向的变化规律，亦即代表了电场强度横向分量  $\mathbf{E}_t$  沿  $z$  轴的变化规律。 $U(z)$  具有电位的量纲，故称其为 TM 波的模式电压。 $I(z)$  表示磁场强度横向分量沿  $z$  轴的变化规律， $I(z)$  具有电流的量纲，故称其为 TM 波的模式电流。

将式(8-15a)代入式(8-2d)，整理后可得

$$\frac{\nabla_t^2 \varphi}{\varphi} = \frac{j\omega\epsilon}{I(z)} \frac{dU(z)}{dz} - k^2$$

上式左边仅是横向坐标  $(u_1, u_2)$  的函数，右边仅是纵向坐标  $z$  的函数，要使等式成立，两边必须等于同一常数  $-k_c^2$ ，即

$$\nabla_t^2 \varphi + k_c^2 \varphi = 0 \quad (8-16)$$

$$\frac{dU(z)}{dz} = -\frac{\gamma^2}{j\omega\epsilon} I(z) = -jZ_{TM}\beta I(z) \quad (8-17a)$$

式中： $\gamma = j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2}$ ； $Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon}$ 。式(8-15c)两边对  $z$  求导得

$$\frac{dI(z)}{dz} = -j\omega\epsilon U(z) = -j\frac{\beta}{Z_{TM}} U(z) \quad (8-17b)$$

式(8-17)就是模式电压和模式电流(即纵向函数)所满足的方程，与长线理论中由分布参数等效电路导出的传输线方程具有相同的形式，故称其为 TM 波的广义传输线方程。

从式(8-17)可得模式电压与模式电流所满足的波动方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = \frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \beta^2 U(z) = 0 \\ \frac{d^2 I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = \frac{d^2 I(z)}{dz^2} + \beta^2 I(z) = 0 \end{cases} \quad (8-17c)$$

式(8-16)是求解横向函数的标量亥姆霍兹方程。由此式及  $\varphi$  的边界条件，就可以确

定横向分布函数。式(8-17)是求解纵向函数的基本公式,对于理想的无穷长导波系统,其解为

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{-j\beta z} \\ I(z) = \frac{A_1}{Z_{TM}} e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (8-17d)$$

将式(8-17d)及由式(8-16)求得的 $\varphi$ 代入式(8-15),就可求得 TM 波的全部场分量表达式。

## 2. TE 波

TE 波型电场的纵向分量  $E_z=0$ , 代入式(8-2a)得  $\nabla_t \times \mathbf{H}_t = \mathbf{0}$ 。令

$$\mathbf{H}_t = -\nabla_t \Psi(u_1, u_2, z) \quad (8-18a)$$

式中  $\Psi$  为标量磁位函数。 $\Psi$  可写成

$$\Psi(u_1, u_2, z) = I(z)\phi(u_1, u_2) \quad (8-18b)$$

将上式代入式(8-18a)及式(8-2c)、式(8-2d), 便可得到 TE 波各场分量的基本关系式:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_t = -I(z)\nabla_t \phi(u_1, u_2) \\ \mathbf{E}_t = -U(z)\nabla_t \phi \times \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (8-19a)$$

$$H_z = \frac{U(z)}{j\omega\mu} \nabla_t^2 \phi \quad (8-19b)$$

式中:

$$U_z = \int -j\omega\mu I(z) dz \quad (8-19c)$$

式(8-19)表明,求解 TE 波全部场分量可归结为求解纵向分布函数  $U(z)$ 、 $I(z)$  和横向分布函数  $\phi(u_1, u_2)$ 。 $U(z)$  和  $I(z)$  分别称为 TE 波的模式电压和模式电流,它们表示 TE 波横向电场与横向磁场沿  $z$  轴的变化规律。无论 TE 波还是 TM 波,  $U(z)$  和  $I(z)$  都分别称为模式电压和模式电流,但  $U(z)$  与  $I(z)$  之间的关系是不同的。至于  $\varphi$  与  $\phi$  的区别就更明显了,  $\varphi$  代表电位函数的横向分布,  $\phi$  代表磁位函数的横向分布。

与分析 TM 波过程完全相同,由式(8-19a)、式(8-2b)及式(8-19c)可得

$$\nabla_t^2 \phi + k_c^2 \phi = 0 \quad (8-20)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{\gamma^2}{j\omega\mu} U(z) = -j \frac{\beta}{Z_{TE}} U(z) \quad (8-21a)$$

$$\frac{dU(z)}{dz} = -j\omega\mu I(z) = -jZ_{TE}\beta I(z) \quad (8-21b)$$

式中:  $\gamma^2 = k_c^2 - k^2 = (j\beta)^2$ ;  $Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta}$ 。式(8-21)就是 TE 波的广义传输线方程,其所满足的波动方程与式(8-17c)完全一样,即

$$\begin{cases} \frac{d^2 U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = \frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \beta^2 U(z) = 0 \\ \frac{d^2 I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = \frac{d^2 I(z)}{dz^2} + \beta^2 I(z) = 0 \end{cases} \quad (8-21c)$$

式(8-21c)的解为

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{-j\beta z} \\ I(z) = \frac{A_1}{Z_{TE}} e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (8-21d)$$

将由式(8-20)求得的 $\psi$ 及式(8-21d)的 $U(z)$ 、 $I(z)$ 代入式(8-19a)、式(8-19b),便可得到 TE 波的全部场量表达式。

### 3. TEM 波

横电磁波的纵向电磁场分量都为零,即 $E_z=0$ , $H_z=0$ ,故 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_t$ , $\mathbf{H}=\mathbf{H}_t$ 。显然,如果 TM 波的 $E_z$ (或 TM 波的 $H_z$ )等于零,它就变成了 TEM 波,但由式(8-6)可知,此时必有 $k_c=0$ , $\gamma=j\beta=jk_z$ 。这样 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 仍可由式(8-15a)计算,即

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = -U(z) \nabla_t \varphi \\ \mathbf{H}_t = I(z) \nabla_t \varphi \times \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (8-22a)$$

由式(8-16)、式(8-17)可得

$$\nabla_t^2 \varphi = 0 \quad (8-22b)$$

$$\begin{cases} \frac{dU(z)}{dz} = -j\omega\mu I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -j\mu\epsilon U(z) \end{cases} \quad (8-22c)$$

式(8-22b)是 TEM 波横向分布函数 $\varphi$ 所满足的二维拉普拉斯方程。式(8-22c)就是 TEM 波的模式电压、模式电流所满足的广义传输线方程,对于理想无穷长的 TEM 波导行系统,其解为

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{-j\beta z} \\ I(z) = \frac{A_1}{Z_{TEM}} e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (8-22d)$$

式中:

$$Z_{TEM} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta, \quad \beta = k_z = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

如前所述,TEM 波只能存在于多导体导波系统中,但 TEM 波并不是其中可能存在的唯一波型,在一定的条件下,其中也可以存在一系列 TE 波或 TM 波及它们的混合波。

#### 8.1.5 边界条件

无论是用纵向分量法求解导行波,还是用位函数法求解导行波,最终都是根据导行系统的边界条件确定 $k_c$ 和积分常数的。对于由理想导体构成的导行系统,其横截面如图 8-1 所示,边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (8-23)$$

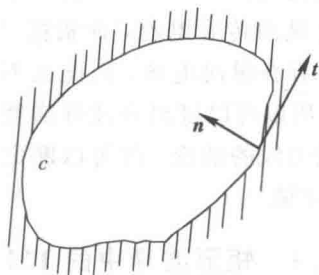


图 8-1 导波系统横截面

对于 TEM 波, 其边界条件为

$$E_z|_c = 0 \quad (8-24a)$$

由式(8-15b)及式(8-16)可知:

$$E_z = -\frac{I(z)}{j\omega\epsilon} \nabla_c^2 \varphi = \frac{I(z)}{j\omega\epsilon} k_c^2 \varphi$$

由于  $k_c \neq 0$ , 所以有

$$\varphi|_c = 0 \quad (8-24b)$$

对于 TE 波, 其边界条件为

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_c = 0 \quad (8-25a)$$

用横向分布函数表示时有

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_c = 0 \quad (8-25b)$$

对于 TEM 波, 其边界条件为

$$E_t|_c = 0 \quad (8-26a)$$

或者是用横向分布函数表示为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_c = 0 \quad (8-26b)$$

## 8.2 矩形波导

在微波波段, 为了减小传输损耗并防止电磁波能量向外泄漏, 往往采用空芯的金属管作为传输电磁波能量的导波装置。这种空芯金属导波装置通常称为波导, 电磁波能量在波导管内部空间被引导向  $+z$  方向传输。最常用的波导是矩形波导和圆柱形波导, 我们分别进行讨论。

在金属波导中不能够传输 TEM 波, 这是因为它不能满足金属波导的边界条件。若 TEM 波在波导中存在, 则磁力线应在波导横截面内, 而且是一闭合曲线。根据麦克斯韦方程, 在此闭合曲线磁场的线积分应等于与闭合曲线交链的轴向电流, 此轴向电流可以是传导电流或位移电流。我们知道在空芯波导内不可能存在纵向传导电流, 而根据 TEM 波的定义, TEM 波不存在纵向电场, 因此也不可能存在纵向位移电流。所以可以得出在波导横截面内不可能存在闭合的磁力线的结论, 故可以断定在波导中不可能存在 TEM 波。

### 8.2.1 矩形波导中的 TM 波

图 8-2 表示矩形波导的横截面, 宽边尺寸为  $a$ , 窄边尺寸为  $b$ 。波导内传输 TM 波时,  $H_z = 0$ 。

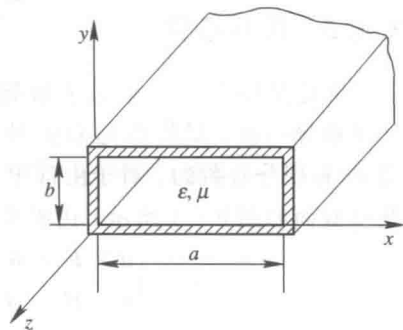


图 8-2 矩形波导



按照上节的分析,先由方程式(8-5d)解出  $E_z$ ,再利用式(8-6)确定  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $H_x$ 、 $H_y$ 。如图8-2所示的矩形波导,我们采用直角坐标系来分析,其坐标  $u_1$  对应  $x$  轴,坐标  $u_2$  对应  $y$  轴,而拉梅系数  $h_1=h_2=1$ ,则  $E_z$  满足如下方程:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad (8-27)$$

式中  $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$ 。用分离变量法求解式(8-27),设其解为

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (8-28)$$

式中  $X$  表示只含变量  $x$  的函数,  $Y$  表示只含变量  $y$  的函数。

值得注意的是,在运算中场量随时间和沿  $z$  方向变化的因子  $e^{j\omega t - \gamma z}$  均被省略。将式(8-28)代入式(8-27),可得

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_c^2 XY \quad (8-29)$$

上式两边除以  $XY$ ,得

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \frac{1}{X} + \frac{d^2 Y}{dy^2} \frac{1}{Y} = -k_c^2 \quad (8-30)$$

这里的  $x$  和  $y$  是互不相关的独立变量。欲使上式对任意  $x$  和  $y$  值都成立,只有等式左边的两项分别等于常数。因此,可令

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad (8-31)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (8-32)$$

且

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (8-33)$$

则式(8-31)和式(8-32)的通解为

$$X = C_1 \cos k_x x + C_2 \sin k_x x \quad (8-34)$$

$$Y = C_3 \cos k_y y + C_4 \sin k_y y \quad (8-35)$$

于是  $E_z$  的通解是

$$E_z = (C_1 \cos k_x x + C_2 \sin k_x x)(C_3 \cos k_y y + C_4 \sin k_y y) \quad (8-36)$$

式中  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  以及  $k_x$ 、 $k_y$  均为待定常数。

现在利用边界条件来确定待定常数。

(1) 当  $x=0$  时,  $E_z=0$ (理想导体表面切向场为零):

$$E_z = C_1(C_3 \cos k_y y + C_4 \sin k_y y) = 0$$

欲使上式对所有  $y$  值都成立,则  $C_1$  应等于零,于是式(8-36)变为

$$E_z = C_2 \sin k_x x (C_3 \cos k_y y + C_4 \sin k_y y) \quad (8-37)$$

(2) 当  $y=0$  时,  $E_z=0$ , 式(8-37)变为

$$E_z = C_2 C_3 \sin k_x x = 0$$

欲使上式对所有  $x$  值都成立,则  $C_3$  应等于零。此时  $C_2$  不能为零,因为若  $C_2$  等于零,则  $E_z$  在非边界处也恒为零,这与 TM 波的情况不符,因此只能取  $C_3$  等于零。这样式(8-37)变为

$$E_z = C_2 C_4 \sin k_x x \sin k_y y = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \quad (8-38)$$

(3) 当  $x=a$  时,  $E_z=0$ , 式(8-38)变为

$$E_z = E_0 \sin k_x a \sin k_y y = 0$$

欲使上式对所有  $y$  值都成立,  $k_x$  必须满足下面关系:

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

这里  $m$  不能等于零, 否则  $k_x=0$ , 则  $E_z$  恒等于零, 这不符合 TM 波的定义。于是式(8-38)就变为

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin k_y y \quad (8-39)$$

(4) 当  $y=b$  时,  $E_z=0$ , 式(8-39)变为

$$E_z = E_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin k_y b = 0$$

欲使上式对所有  $x$  值都成立,  $k_y$  必须满足下面关系:

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

这样  $E_z$  的表示式为

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8-40)$$

将式(8-40)代入式(8-6), 并考虑到  $h_1=h_2=1$ ,  $u_1$  对应  $x$  坐标,  $u_2$  对应  $y$  坐标, 而  $\gamma=j\beta=jk_z$ , 即可得到矩形波导中 TM 波的场分量为

$$E_x = -j \frac{k_z}{k_c^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-41a)$$

$$E_y = -j \frac{k_z}{k_c^2} \left( \frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-41b)$$

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-41c)$$

$$H_x = j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \left( \frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-41d)$$

$$H_y = -j \frac{\omega \epsilon}{k_c^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-41e)$$

式中:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (8-42)$$

式(8-41)表示了场量随着  $x$ 、 $y$ 、 $z$  以及时间  $t$  的变化规律, 也表征了矩形波导中 TM 波的场结构。取不同的  $m$  和  $n$  值, 代表不同的 TM 波场结构模式, 用  $\text{TM}_{mn}$  表示。所以波导中可以有无多个 TM 模式。由式(8-40)可以看出, 下标  $m$  表示在  $x$  方向上场量变化的半波数, 下标  $n$  表示在  $y$  方向上场量变化的半波数。从  $E_z$  的表示式(8-41c)可以看出  $m$ 、 $n$  不能取零值, 所以在矩形波导中,  $\text{TM}_{00}$ 、 $\text{TM}_{0n}$ 、 $\text{TM}_{m0}$  波型不存在,  $\text{TM}_{11}$  是 TM 波中最简单的波形。

在矩形波导中 TM 波的传输常数为

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}\end{aligned}\quad (8-43)$$

当传输常数  $\gamma=0$  所对应的频率为截止频率  $f_c$ ，且截止频率为

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (8-44)$$

时，从式(8-43)可以看出，当工作频率高于截止频率时，即  $f > f_c$ ， $\gamma$  为纯虚数， $\gamma = j\beta = jk_z$ ，电磁波才可能在波导中沿  $z$  方向传输。这种  $z$  方向传输常数为

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (8-45)$$

或写成

$$k_z = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}) \quad (8-46)$$

当工作频率低于截止频率时，即  $f < f_c$ ， $\gamma$  为实数， $\gamma = \alpha$ 。此时  $e^{-\alpha z}$  表示衰减，电磁波衰减很快，不可能在波导中传输。因此矩形波导呈现出高通滤波器的特性，只有工作频率高于截止频率时，电磁波才能在波导中传输。这一点与 TEM 波不一样，TEM 波没有截止频率。

由式(8-44)可以求得相应的截止波长  $\lambda_c$ ：

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

式中  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$  为无限介质中的电磁波的速度。电磁波在矩形波导中的速度  $v_p$  为

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (8-47)$$

在矩形波导中的波导波长  $\lambda_g$  为

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (8-48)$$

式中的  $\lambda$  是在无限介质中电磁波的波长。

从式(8-47)和式(8-48)可以看出： $f = f_c$  时， $v_p$  趋于无限大，波导波长  $\lambda_g$  趋于无限大；当  $f > f_c$  时， $v_p$  大于  $v$ ， $\lambda_g > \lambda$ ，即电磁波在波导中传输的相速大于在无限介质中电磁波传播的相速，波导波长大于在无限介质中电磁波的波长；当频率非常高时，即  $f \gg f_c$ ，在波导中电磁波的相速趋近于无限介质中电磁波的相速，波导波长趋于无限介质中电磁波的波长。

图 8-3 中给出了  $TM_{11}$  和  $TM_{21}$  波的场分量分布图。

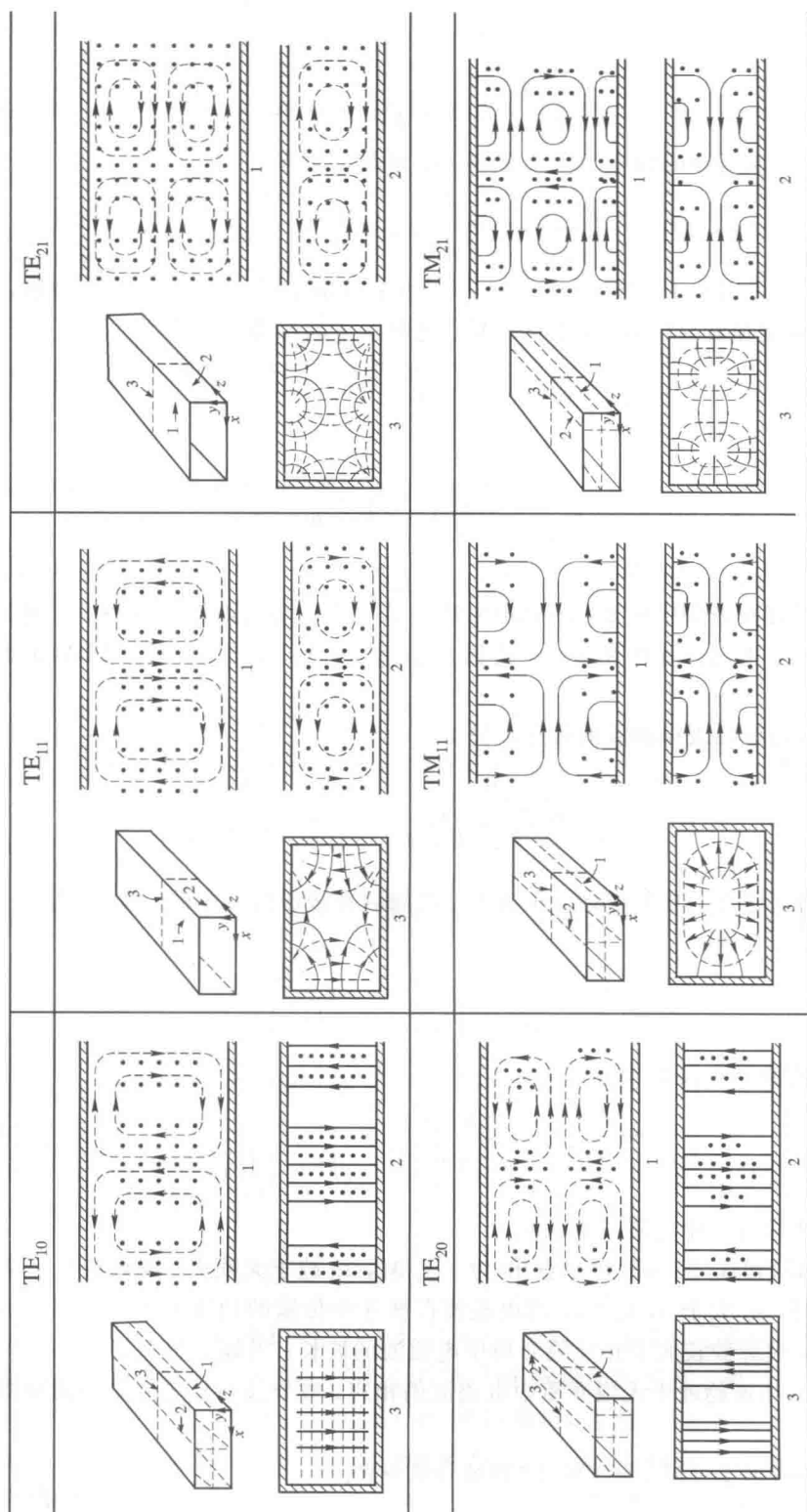


图 8-3 矩形波导中几种波型的场结构(----磁力线;——电力线)

### 8.2.2 矩形波导中的 TE 波

仿照求解 TM 波的方法, 我们可以求得在矩形波导中 TE 波的场分量表示式为

$$H_z = H_0 \cos k_x x \cos k_y y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-49a)$$

$$H_x = j \frac{k_y k_z}{k_c^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-49b)$$

$$H_y = j \frac{k_x k_z}{k_c^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-49c)$$

$$E_x = j \frac{\omega \mu}{k_c^2} k_y H_0 \cos k_x x \sin k_y y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-49d)$$

$$E_y = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} k_x H_0 \sin k_x x \cos k_y y e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-49e)$$

其中:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2}$$

截止波数  $k_c$  为

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

截止频率为

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

截止波长为

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

TE 波在波导中的相速  $v_p$  为

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

TE 波在波导中的波导波长  $\lambda_g$  为

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

从以上公式可以看出,  $k_x$ 、 $k_y$ 、 $k_z$ 、 $k_c$ 、 $f_c$ 、 $\lambda_c$ 、 $v_p$  以及  $\lambda_g$  等计算公式与 TM 波完全相同。与 TM 波一样, 在矩形波导中有无穷多个 TE 波的模式, 这些模式用  $TE_{mn}$  表示。其  $m$  表示沿波导宽边场量分布的半波数,  $n$  表示沿波导窄边场量分布的半波数。 $m$  或  $n$  可以等于零, 但不能同时为零, 此时由式(8-49)可以看出场分量不同时为零, 所以在矩形波导中可以存在  $TE_{m0}$  和  $TE_{0n}$  诸模式。由于在矩形波导中一般情况下  $a > b$  (参见图 8-2), 所以  $TE_{10}$  波的截止频率比  $TE_{01}$  波的截止频率低, 因此在矩形波导中,  $TE_{10}$  波是截止频率最低的模式。通常把具有最低截止频率的模式称为主模。 $TE_{10}$  波是矩形波导中的主模。

图 8-3 中还给出了矩形波导中  $TE_{10}$  波、 $TE_{11}$  波和  $TE_{21}$  波的场量分布图。

图 8-4 给出了在矩形波导中各种模式的截止波长分布图, 在这里假设矩形波导横截面尺寸  $a > 2b$ 。图中划分了三个区域: I 区域为截止区; II 区域为单模工作区; III 区域为多模工作区。大多数情况下波导工作在单模工作区。

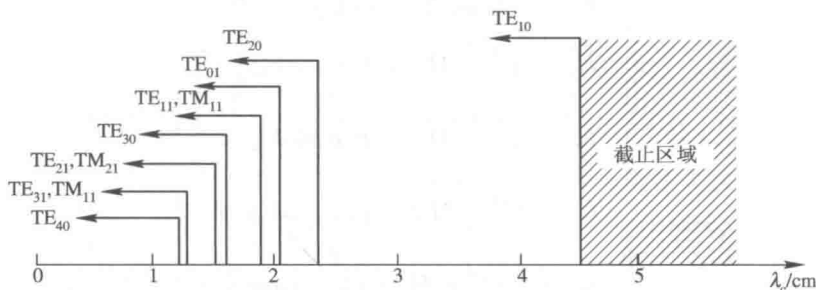


图 8-4 矩形波导中截止波长分布图(以 BJ-100 为例)

在矩形波导中模序数( $m$  和  $n$ )相同的  $TE_{mn}$  模和  $TM_{mn}$  模具有相同的截止波长。由于具有相同截止波长的模称为简并模, 因此  $TE_{mn}$  模与  $TM_{mn}$  模是一对简并模。由于在矩形波导中  $TM_{m0}$  模和  $TM_{0n}$  模不存在, 所以在矩形波导中  $TE_{m0}$  模和  $TE_{0n}$  模是非简并模。

在 8.1 节中, 我们把相对于电磁波传输方向成右手螺旋关系的横向电场分量与横向磁场分量的比值定义为波阻抗。对于矩形波导中的  $TM$  波和  $TE$  波, 其波阻抗为

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{k_z}{\omega\epsilon} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (8-50a)$$

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{k_z} = \eta\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (8-50b)$$

式中,  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  为无限介质中的波阻抗。

由式(8-50a)和式(8-50b)可以看出: 当  $f = f_c$  时, 在矩形波导中电磁波处于临界状态, 此时  $Z_{TM}$  等于零,  $Z_{TE}$  趋于无穷; 当  $f > f_c$  时, 在矩形波导中电磁波沿  $+z$  方向传输,  $Z_{TM}$  和  $Z_{TE}$  均为实数; 当  $f < f_c$  时,  $Z_{TM}$  和  $Z_{TE}$  均为纯虚数。前面我们已经讲过, 当  $f < f_c$  时, 在矩形波导中电磁波被衰减而不能传输。现在我们看到, 由于波阻抗呈现电抗性, 故这种衰减与欧姆损耗引起的衰减不同。这种衰减是电磁波在源和波导之间来回反射的结果, 能量并没有被损耗掉。

### 8.2.3 矩形波导中的 $TE_{10}$ 波

在矩形波导中  $TE_{10}$  模是主模。用它作为矩形波导中的工作模式有以下突出的优点: 可以实现单模传输电磁波; 具有最宽的工作频带; 在给定频率下有最小的衰减; 场结构简单, 电场只有  $E_y$  分量, 在波导中可以获得单方向极化; 在截止波长相同的条件下, 波导尺寸最小。所以,  $TE_{10}$  模是矩形波导中最常用的工作模式, 有必要着重讨论它的特性。

将  $m=1$ 、 $n=0$ 、 $k_x=k_c=\pi/a$  代入式(8-49), 便可得到  $TE_{10}$  模的场分量表示式为

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-51a)$$

$$H_x = jk_z \left( \frac{\pi}{a} \right) H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-51b)$$

$$E_y = -j\omega\mu \left( \frac{\pi}{a} \right) H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-51c)$$

$$H_y = E_x = E_z = 0 \quad (8-51d)$$

式中传输常数  $k_z = \sqrt{k^2 - k_\lambda^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}$ 。

TE<sub>10</sub> 模电磁场各分量的瞬时表示式为

$$E_y = \frac{\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin(\omega t - k_z z) \quad (8-52a)$$

$$H_x = -\frac{k_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin(\omega t - k_z z) \quad (8-52b)$$

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(\omega t - k_z z) \quad (8-52c)$$

由此可见, TE<sub>10</sub> 模只有  $E_y$ 、 $H_x$ 、 $H_z$  三个场分量。由于这三个场分量均与坐标  $y$  无关, 因此电磁场沿  $y$  方向无变化, 呈现均匀分布。其电场只有  $E_y$  分量, 沿  $x$  方向呈正弦分布, 在波导宽边有半个驻波分布, 且在  $x=a/2$  处电场最强, 在  $x=0$  和  $x=a$  处电场为零;  $E_z$  沿  $z$  方向呈正弦分布。TE<sub>10</sub> 模的电场分布如图 8-5(a) 所示。

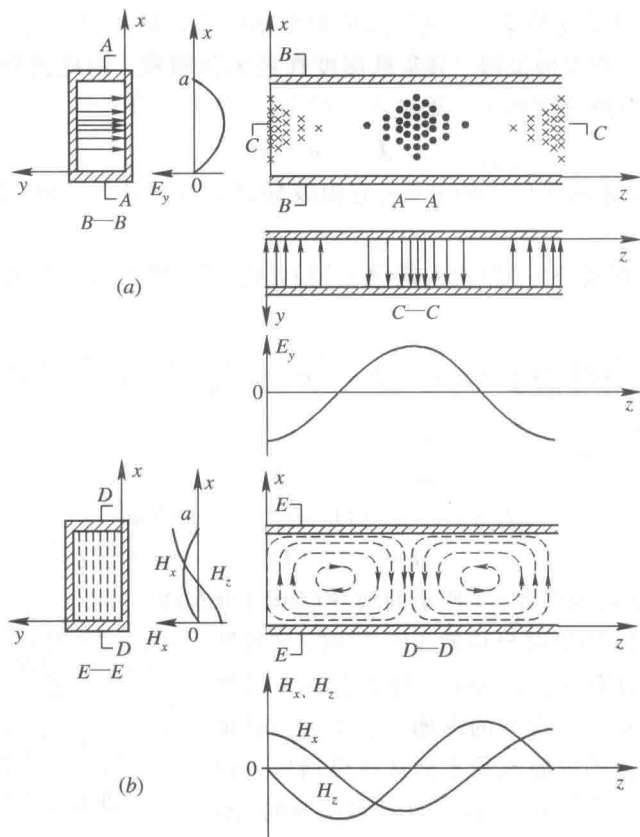


图 8-5 TE<sub>10</sub> 模的电场、磁场结构

TE<sub>10</sub> 模的磁场有  $H_x$ 、 $H_z$  两个分量。 $H_z$  在  $z$  方向和  $x$  方向都呈正弦分布, 并且在波导宽边有半个驻波分布, 而且在  $x=a/2$  处有最大值, 在  $x=0$  和  $x=a$  处为零;  $H_x$  在  $x$  方向和  $z$  方向都呈余弦分布, 在波导宽边有半个驻波分布, 且在  $x=0$  和  $x=a$  处有最大值, 在  $x=a/2$  处为零。 $H_x$  和  $H_z$  这两个分量形成与波导宽边平行的闭合磁力线。TE<sub>10</sub> 模的磁场结构如图 8-5(b) 所示。

TE<sub>10</sub> 模电磁场完整的结构如图 8-6 所示。随时间  $t$  的增加, TE<sub>10</sub> 模场结构以相速  $v_p$  向  $+z$  方向运动。

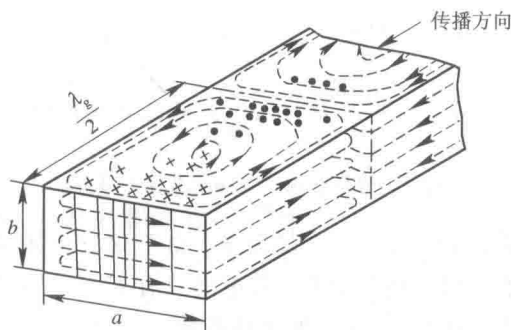


图 8-6 TE<sub>10</sub> 模电磁场结构立体图

当波导中有电磁能量传输时, 波导内壁处有感应的高频传导电流。由于波导内壁是导电率极高的良导体, 在微波波段, 其集肤深度在微米数量级, 因此波导内壁上的电流可看成表面电流, 其面电流密度由下式确定:

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_t \quad (8-53)$$

式中:  $\mathbf{n}$  为波导内壁上的单位法向矢量, 它由波导管壁指向波导管内;  $\mathbf{H}_t$  是波导管内壁处的切向磁场。

对于 TE<sub>10</sub> 模, 将式(8-52)代入式(8-53), 则 TE<sub>10</sub> 模在波导管内壁上的感应面电流密度为

$$\mathbf{J}_S|_{y=0} = \left[ H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - k_z z) \right] \mathbf{e}_x + \left[ \frac{k_z a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - k_z z) \right] \mathbf{e}_y \quad (8-54a)$$

$$\mathbf{J}_S|_{y=b} = -\mathbf{J}_S|_{y=0} \quad (8-54b)$$

$$\mathbf{J}_S|_{x=0} = -[H_0 \cos(\omega t - \beta z)] \mathbf{e}_x \quad (8-54c)$$

$$\mathbf{J}_S|_{x=a} = \mathbf{J}_S|_{x=0} \quad (8-54d)$$

由式(8-54)可以绘出如图 8-7 所示的波导壁电流分布图。

由图 8-7 可知, 矩形波导传输 TE<sub>10</sub> 模时, 波导宽边正中央的面电流只有  $z$  方向分量。如果在矩形波导宽边正中央沿  $z$  方向开一很窄的纵槽, 它不会切断电流通路, 因此 TE<sub>10</sub> 波的电磁能量不会从该纵槽辐射出来, 波导内场分布也不会改变。这一点是很重要的, 利用这个原理可以构成许多器件。

在矩形波导中传输 TE<sub>10</sub> 模时, 其截止波长为

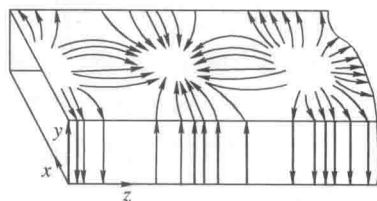


图 8-7 TE<sub>10</sub> 模的壁电流分布



$$\lambda_c = 2a$$

波导波长为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

波阻抗为

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

### 8.3 圆柱形波导

圆柱形波导(简称圆波导)是横截面为圆形的空芯金属波导管,其结构如图 8-8 所示,图中  $a$  是圆波导的内半径。求解圆波导内场量分布的方法与求解矩形波导内场量分布的方法完全一样,但采用如图 8-8 所示的圆柱坐标系比较方便。

#### 8.3.1 圆波导中的模式

对于图 8-8 所示的圆柱坐标系  $(r, \phi, z)$ , 电场强度和磁场强度的纵向分量满足式 (8-5d)(即满足亥姆霍兹方程)。考虑到拉梅系数  $h_1=1, h_2=r, h_3=1$ , 在圆柱坐标系下亥姆霍兹方程可表示为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad (8-55a)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 H_z = 0 \quad (8-55b)$$

下面先解方程式 (8-55a)。令

$$E_z(r, \phi) = R(r)\varphi(\phi) \quad (8-56)$$

将方程式 (8-55a) 分离变量, 得

$$\frac{d^2 \varphi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \varphi(\phi) = 0 \quad (8-57a)$$

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (k_c^2 r^2 - m^2) R(r) = 0 \quad (8-57b)$$

式中  $m$  为分离常数。式 (8-57a) 是简谐振动方程, 其解为

$$\varphi(\phi) = A \cos(m\phi - \phi_0) \quad (8-58a)$$

方程式 (8-57b) 是  $m$  阶贝塞尔方程, 其解为

$$R(r) = B_1 J_m(k_c r) + B_2 N_m(k_c r) \quad (8-58b)$$

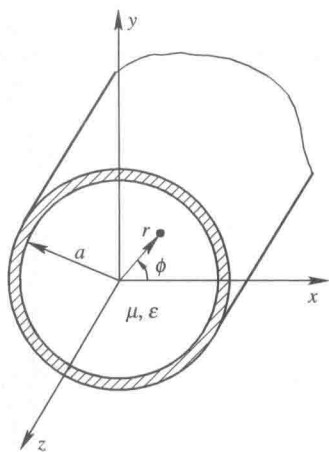


图 8-8 圆柱形波导

式中  $J_m(k_c r)$  为  $m$  阶第一类贝塞尔函数,  $N_m(k_c r)$  为  $m$  阶第二类贝塞尔函数。习惯上, 人们常称  $J_m(k_c r)$  为  $m$  阶贝塞尔函数, 而称  $N_m(k_c r)$  为纽曼函数。在图 8-9 中给出了几条低阶贝塞尔函数、贝塞尔函数的导数和纽曼函数的曲线。其它各阶贝塞尔函数、它们的导数和纽曼函数也有类似于该图的振荡衰减特性。由图可知, 这三种函数各自都有无穷多个根。这里用  $x_{mn}$  表示  $m$  阶贝塞尔函数  $J_m(x)$  的第  $n$  个根, 用  $x'_{mn}$  表示  $m$  阶贝塞尔函数的导数  $J'_m(x)$  的第  $n$  个根。表 8-1 和表 8-2 分别列出了几个低阶贝塞尔函数和它们的导函数的前几个根。另外再列出  $J_m(x)$  和  $N_m(x)$  的几条重要性质, 这就是:

$$\left. \begin{aligned} J_0(0) &= 1 \\ J_m(0) &= 0 \quad (m \neq 0) \\ N_m(0) &= -\infty \\ J'_0(x) &= \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) \end{aligned} \right\} \quad (8-59)$$

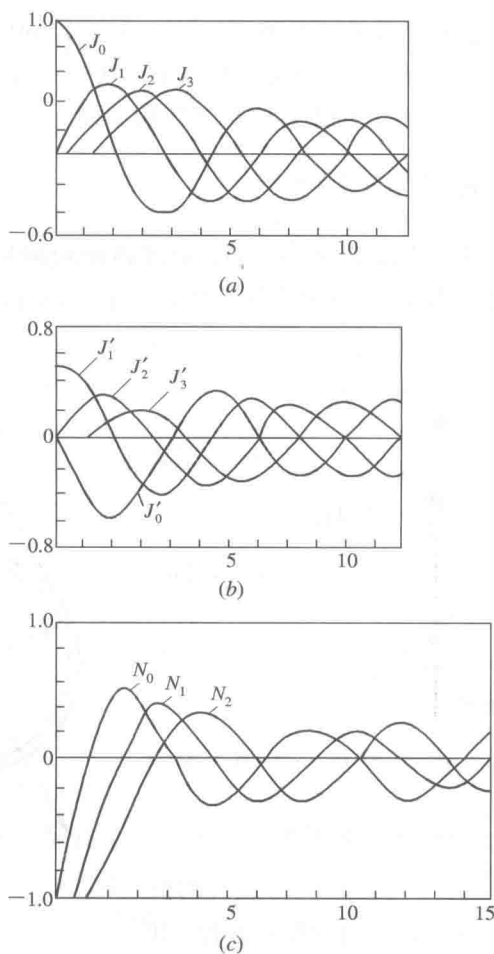


图 8-9 贝塞尔函数及其导数的变化曲线

(a) 第一类贝塞尔函数  $J_m(x)$ ; (b) 第一类贝塞尔函数的导数  $J'_m(x)$ ; (c) 第二类贝塞尔函数  $N_m(x)$

表 8-1  $J_m(x)$  的根  $x_{nm}$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
1	2.405	3.832	5.139	6.370	7.588
2	5.520	7.016	8.417	9.760	11.065
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.313
4	11.792	13.324	14.796	16.220	17.616

表 8-2  $J'_m(x)$  的根  $x'_{nm}$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
1	3.832	1.841	3.054	4.201	5.317
2	7.016	5.331	6.706	8.015	9.282
3	10.173	8.536	9.965	11.846	12.682

将式(8-58)代入式(8-56), 则

$$E_z(r, \phi) = A[B_1 J_m(k_c r) + B_2 N_m(k_c r)] \cos(m\phi - \phi_0) \tag{8-60a}$$

用同样的方法可得到式(8-55b)的解为

$$H_z(r, \phi) = C[D_1 J_m(k_c r) + D_2 N_m(k_c r)] \cos(m\phi - \phi_0) \tag{8-60b}$$

在圆柱坐标系中,  $(r, \phi)$  与  $(r, \phi + 2\pi)$  代表圆波导横截面上的同一点。为使圆波导中场量具有单值性, 式(8-60)中的  $m$  只能取  $m=0, 1, 2, \cdots$  等整数。在圆波导中,  $r$  的取值范围是  $0 \leq r \leq a$ 。为使其中的场量在  $r=0$  处有界, 式(8-60)中不能有  $N_m(k_c r)$  的项, 即应有  $B_2=D_2=0$ 。于是式(8-60)简化为

$$\begin{aligned} E_z(r, \phi) &= E_0 J_m(k_c r) \cos(m\phi - \phi_0) \\ H_z(r, \phi) &= H_0 J_m(k_c r) \cos(m\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

由此又可得到

$$E_z(r, \phi, z, t) = E_0 J_m(k_c r) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{8-61a}$$

$$H_z(r, \phi, z, t) = H_0 J_m(k_c r) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \tag{8-61b}$$

式中  $E_0, H_0$  由激励源确定,  $k_c$  则应由边界条件确定。下面分别讨论可以在圆波导中分立存在的 TE 模和 TM 模。

1. 圆波导中的 TE 模

对于 TE 模,  $E_z=0$  而  $H_z \neq 0$ 。由边界条件可知, 圆波导中 TE 模应满足的边界条件为

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

将式(8-61)代入该式, 得  $J'_m(k_c a)=0, k_c a=x'_{nm}$ 。于是

$$k_c = \frac{x'_{nm}}{a} \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (8-62)$$

$$(\lambda_c)_{H_{nm}} = \frac{2\pi a}{x'_{nm}} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (8-63)$$

表 8-3 列出了空气填充时圆波导中几个 TE 模的截止波长值。

表 8-3 圆波导中 TE 模的截止波长值( $\mu_r=1$ ,  $\epsilon_r=1$ )

波型	H <sub>11</sub>	H <sub>21</sub>	H <sub>01</sub>	H <sub>30</sub>	H <sub>41</sub>	H <sub>12</sub>	H <sub>22</sub>	H <sub>02</sub>	H <sub>32</sub>
$\lambda_c$	3.413a	2.057a	1.640a	1.496a	1.182a	1.179a	0.937a	0.896a	0.784a

将式(8-62)代入式(8-61b), 再把所得结果和  $E_z=0$  代入式(8-6), 则圆波导中 TE 模的各分量分别为

$$\left. \begin{aligned} E_r(r, \phi, z) &= \frac{j\omega\mu ma^2}{x_{nm}^2 r} H_0 J_m \left( \frac{x'_{nm}}{a} r \right) \sin(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\ E_\phi(r, \phi, z) &= \frac{j\omega\mu a}{x_{nm}} H_0 J'_m \left( \frac{x'_{nm}}{a} r \right) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\ E_z(r, \phi, z) &= 0 \\ H_r(r, \phi, z) &= -\frac{ra}{x_{nm}} H_0 J'_m \left( \frac{x'_{nm}}{a} r \right) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\ H_\phi(r, \phi, z) &= \frac{rma^2}{x_{nm}^2 r} H_0 J_m \left( \frac{x'_{nm}}{a} r \right) \sin(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\ H_z(r, \phi, z) &= H_0 J_m \left( \frac{x'_{nm}}{a} r \right) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (8-64)$$

## 2. 圆波导中的 TM 模

对于 TM 模,  $E_z \neq 0$  而  $H_z = 0$ 。在波导壁处, 电场切向分量应为零, 所以必有

$$E_z|_{r=a} = 0$$

将式(8-61a)代入该式, 得  $J_m(k_c a) = 0$ ,  $k_c a = x_{nm}$ 。于是

$$k_c = \frac{x_{nm}}{a} \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (8-65)$$

$$(\lambda_c)_{E_{nm}} = \frac{2\pi a}{x_{nm}} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (8-66)$$

表 8-4 列出了空气填充时圆波导几个 TM 模的截止波长值。

表 8-4 圆波导中 TM 模的截止波长值( $\mu_r=1$ ,  $\epsilon_r=1$ )

波型	E <sub>01</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>21</sub>	E <sub>02</sub>	E <sub>31</sub>	E <sub>12</sub>	E <sub>41</sub>	E <sub>22</sub>	E <sub>03</sub>
$\lambda_c$	2.613a	1.640a	1.223a	1.138a	0.986a	0.896a	0.828a	0.746a	0.726a

将式(8-65)代入式(8-61a), 再把所得结果和  $H_z=0$  代入式(8-6), 则圆波导中 TM 模的各分量分别为

$$\left. \begin{aligned}
 E_r(r, \phi, z, t) &= -\frac{\gamma a}{x_{mn}} E_0 J'_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\
 E_\phi(r, \phi, z, t) &= \frac{\gamma_m a^2}{x_{mn}^2 r} E_0 J_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) \sin(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\
 E_z(r, \phi, z, t) &= E_0 J_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\
 H_r(r, \phi, z, t) &= -\frac{j\omega \epsilon m a^2}{x_{mn}^2 r} E_0 J_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) \sin(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\
 H_\phi(r, \phi, z, t) &= -\frac{j\omega \epsilon a}{x_{mn}} E_0 J'_m\left(\frac{x_{mn}}{a} r\right) \cos(m\phi - \phi_0) e^{j\omega t - \gamma z} \\
 H_z(r, \phi, z, t) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (8-67)$$

如果我们将式(8-63)和式(8-66)代入 8.1 节中的有关公式,就可得到圆波导中 TE 模和 TM 模的所有传输特性参数的计算公式。

至此,我们已得到了圆波导中所有 TE 模和 TM 模的表示式。可以看出,圆波导中满足边界条件的解有无穷多个,它包括无穷多个 TE<sub>mn</sub> 模和无穷多个 TM<sub>mn</sub> 模,但其中不存在 TE<sub>m0</sub> 模和 TM<sub>m0</sub> 模。对于 TE 和 TM 模中任何一个模式,只要工作频率高于其对应的截止频率,该模式就可以传输,因此圆波导也具有类似于高通滤波器的特性。圆波导中 TE<sub>11</sub> 模的截止波长最长,因此它是圆波导中的主模。在圆波导中,模序数  $m$  表示角坐标  $\phi$  从 0 增加到  $2\pi$  时场量变化的周期数,模序数  $n$  表示沿波导半径方向场量变化的半驻波个数。

圆波导中的导行波存在着极化简并和 E-H 简并。

极化简并:由式(8-64)和式(8-67)可知,圆波导中的 TE 模和 TM 模中,都含有因子  $\cos(m\phi - \phi_0)$  和  $\sin(m\phi - \phi_0)$ ,其中  $\phi_0$  决定了场的极化方向。由于圆波导结构具有轴对称性,故  $\phi_0$  具有不定性。由

$$\begin{aligned}
 \cos(m\phi - \phi_0) &= \cos\phi_0 \cos m\phi + \sin\phi_0 \sin m\phi \\
 \sin(m\phi - \phi_0) &= \cos\phi_0 \sin m\phi - \sin\phi_0 \cos m\phi
 \end{aligned}$$

可知,  $\phi_0$  的不定性实际上表示了在圆周  $\phi$  方向上含有因子  $\cos m\phi$  和  $\sin m\phi$  两个线性无关的互相正交的独立成分。但这两个独立成分却有相同的截止波长、传输特性和完全相同的场结构。这两个独立成分是互相简并的,我们称这种简并为极化简并。考虑到圆波导中的导

行波有极化简并,在式(8-64)和式(8-67)中,  $\cos(m\phi - \phi_0)$  可写成  $\begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}$ ,  $\sin(m\phi - \phi_0)$

可写成  $\begin{pmatrix} \sin m\phi \\ -\cos m\phi \end{pmatrix}$ ,显然只有模序数  $m \neq 0$  的模才存在极化简并。

E-H 简并:由于贝塞尔函数  $-J_1(x) = J'_0(x)$ ,所以  $x_{0n} = x_{1n}$ 。TE<sub>0n</sub> 模与 TM<sub>1n</sub> 模有相同的截止波长,故 TE<sub>0n</sub> 模与 TM<sub>1n</sub> 模简并,我们称这种简并为 E-H 简并。

### 8.3.2 圆波导中的三个常用模式

圆波导中常用的工作模式是 TE<sub>11</sub>、TE<sub>01</sub> 和 TM<sub>01</sub> 三个模,下面分别讨论这三个模式。

#### 1. 圆波导中的 TE<sub>11</sub> 模

在圆波导中,TE<sub>11</sub> 模的  $\lambda_c = 3.413a \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ ,截止波长最长,所以它是圆波导中的主模。将  $m=n=1$ 、 $x_{11}=1.841$  代入式(8-64),则传输型 TE<sub>11</sub> 模的电磁场为

$$\left. \begin{aligned}
 E_r(r, \phi, z, t) &= \pm j \frac{\omega \mu a^2}{(1.841)^2 r} H_0 J_1 \left( \frac{1.841}{a} r \right) \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 E_\phi(r, \phi, z, t) &= j \frac{\omega \mu a}{1.841} H_0 J_1' \left( \frac{1.841}{a} r \right) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 E_z(r, \phi, z, t) &= 0 \\
 H_r(r, \phi, z, t) &= -j \frac{\beta a}{1.841} H_0 J_1' \left( \frac{1.841}{a} r \right) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 H_\phi(r, \phi, z, t) &= \pm j \frac{\beta a^2}{(1.841)^2 r} H_0 J_1 \left( \frac{1.841}{a} r \right) \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \\
 H_z(r, \phi, z, t) &= H_0 J_1 \left( \frac{1.841}{a} r \right) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)}
 \end{aligned} \right\} \quad (8-68)$$

式中  $\beta$  是  $\text{TE}_{11}$  模的相移常数。图 8-10 是其场结构图。

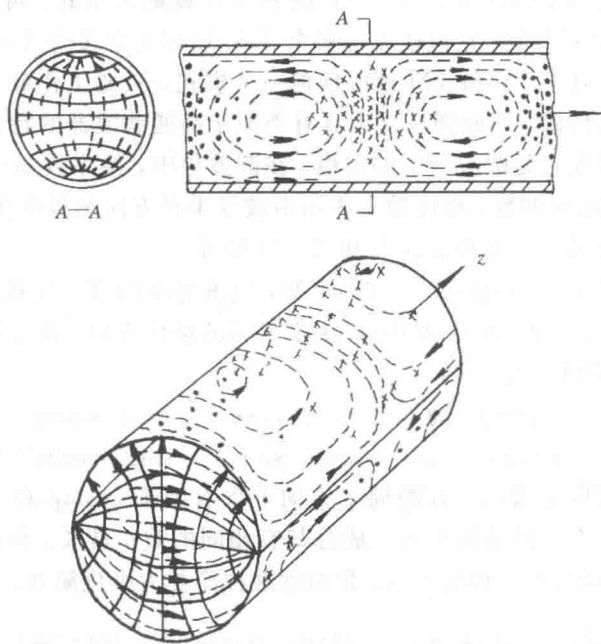


图 8-10 圆波导中  $\text{TE}_{11}$  模的电磁场分布

由于  $\text{TE}_{11}$  模存在极化简并, 因此其极化面是不稳定的。当圆波导由于机械加工而出现不圆度时,  $\text{TE}_{11}$  模的极化面将发生旋转而分裂成一对极化简并模, 故除了用它传输圆极化波以外, 一般不用它“长距离”传输电磁能量。但我们可以利用它具有极化简并的特点, 制造出如极化衰减器、极化变换器和微波铁氧体环行器等有特殊用处的微波元件。

由于圆波导中的  $\text{TE}_{11}$  模与矩形波导中的  $\text{TE}_{10}$  模场分布相似, 因此很容易从矩形波导的  $\text{TE}_{10}$  模过渡到圆波导的  $\text{TE}_{11}$  模, 其过渡段的结构如图 8-11 所示。其中图 8-11(a) 是从矩形过渡到圆形的均匀过渡段, 图 8-11(b) 是在矩形波导与圆波导之间加了若干节部分填平圆波导而构成的  $\lambda/4$  阶梯阻抗、波型变换器。两者相比, 后者易加工, 不会产生极化面旋转, 特别适宜于极化隔离度要求高的天馈系统。

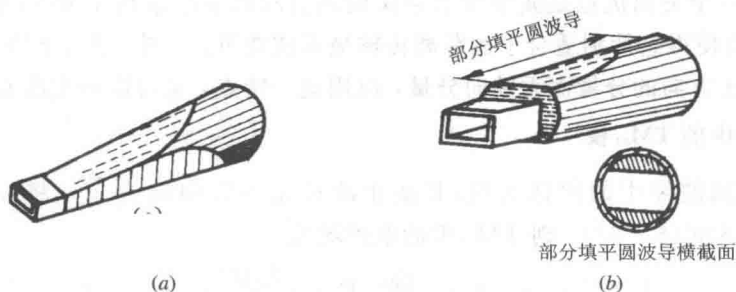


图 8-11 矩形波导至圆波导过渡段

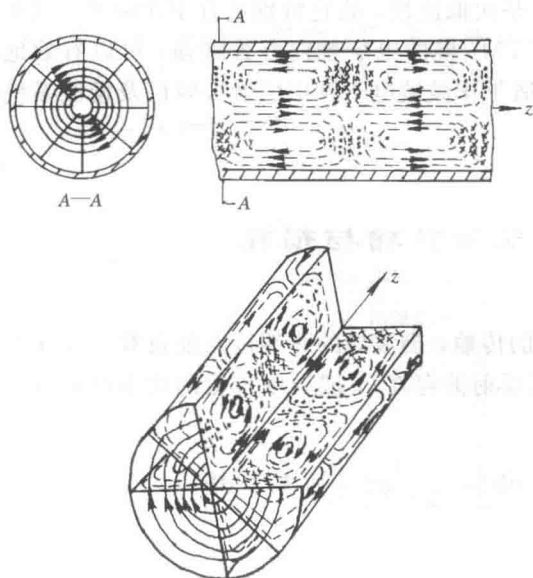
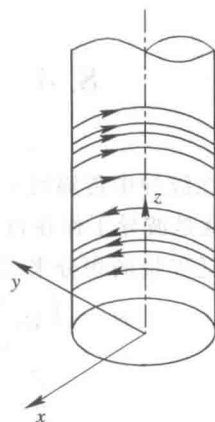
(a) 矩—圆内过渡段; (b) 多级  $\lambda/4$  部分填充过渡段

## 2. 圆波导中的 $TE_{01}$ 模

在圆波导中,  $TE_{01}$  模是高次模, 其截止波长  $\lambda_c = 1.64a \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ 。将  $m=0$ 、 $n=1$ 、 $x_{01} = 3.832$  代入式(8-64), 则圆波导中传输型  $TE_{01}$  模的各场分量分别为

$$\left. \begin{aligned} E_\phi(r, \phi, z, t) &= -j \frac{\omega \mu a}{3.832} H_0 J_1 \left( \frac{3.832}{a} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_r(r, \phi, z, t) &= j \frac{\beta a}{3.832} H_0 J_1 \left( \frac{3.832}{a} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_z(r, \phi, z, t) &= H_0 J_0 \left( \frac{3.832}{a} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_r &= E_z = H_\phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-69)$$

$TE_{01}$  模的电磁场分布如图 8-12 所示。其场分布具有以下特点: 电场沿  $\phi$  方向都没有变化, 电磁场具有轴对称性; 电力线是分布在横截面上的同心圆; 在  $r=a$  处,  $H_r=0$ , 只有  $H_z \neq 0$ , 故在波导壁上只有沿  $\phi$  方向流动的感应电流(见图 8-13)。

图 8-12 圆波导中  $TE_{10}$  模的电磁场分布图 8-13 圆波导中  $TE_{10}$  模的壁电流

TE<sub>01</sub> 模的一个突出优点是波导管壁导体损耗引起的衰减常数  $\alpha_c$  随频率的升高而单调下降, 这一特点使得它特别适合于远距离传输毫米波能量。另外, 由于圆波导中 TE<sub>01</sub> 模的管壁电流只有  $\phi$  方向的分量而无轴向分量, 应用这一特点, 又可以制成高 Q 值的谐振腔。

### 3. 圆波导中的 TM<sub>01</sub> 模

TM<sub>01</sub> 模是圆波导中的次低次模, 其截止波长  $\lambda_c = 2.613a\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$ 。将  $m=0$ 、 $n=1$  和  $x_{m1}=2.405$  代入式(8-67), 则 TM<sub>01</sub> 模的电磁场为

$$\left. \begin{aligned} E_r(r, \phi, z, t) &= \frac{j\beta a}{2.405} E_0 J_1 \left( \frac{2.405}{a} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_z(r, \phi, z, t) &= E_0 J_0 \left( \frac{2.405}{a} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_\phi(r, \phi, z, t) &= \frac{j\omega\epsilon a}{2.405} E_0 J_1 \left( \frac{2.405}{a} r \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_\phi &= H_r = H_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-70)$$

其电磁场分布如图 8-14 所示。

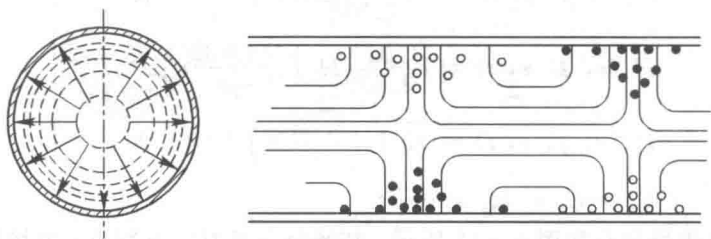


图 8-14 圆波导中 TM<sub>01</sub> 模的电磁场分布

由图 8-14 可知, TM<sub>01</sub> 模的场也具有轴对称性, 而且在轴线附近, 电场轴向分量最强。由于 TM<sub>01</sub> 模的场具有轴对称性, 并且又是次低次模, 故它特别适宜于作微波天线系统旋转关节的工作模式。由于在波导轴线附近 TM<sub>01</sub> 模的电场轴向分量最强, 可以有效地和沿波导轴向运动的电子交换能量, 所以它又适于作微波电子管中的谐振腔以及慢波系统中的工作模式。

## 8.4 波导中的能量传输与损耗

电磁波在波导中传输时必将有电磁能量的传输。当波导的终端接匹配负载或波导为无限长时, 也就是波导工作在行波状态时(即无反射波存在), 波导中传输的功率可由波导横截面上坡印廷矢量的积分来求得:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] = \frac{1}{2|Z|} \int_S |\mathbf{E}_t|^2 dS \\ &= \frac{|Z|}{2} \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS \end{aligned} \quad (8-71)$$

式中:  $\mathbf{E}_t$  和  $\mathbf{H}_t$  分别为波导横截面上的电场强度和磁场强度;  $Z$  为波阻抗。在矩形波导中其传输功率为



$$P = \frac{1}{2Z} \int_0^a \int_0^b (|E_x|^2 + |E_y|^2) dx dy \quad (8-72)$$

在圆柱形波导中其传输功率为

$$P = \frac{1}{2Z} \int_0^a \int_0^{2\pi} (|E_r|^2 + |E_\phi|^2) r dr d\phi \quad (8-73)$$

### 8.4.1 波导的击穿功率与功率容量

对于矩形波导中的  $TE_{10}$  模, 其横向电场只有  $E_y$  分量, 其表示式为

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\omega\mu}{k_c^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - \beta z)} = \frac{\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \\ &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \quad (8-74)$$

式中  $E_0 = \omega\mu a H_0 / \pi$ 。将式(8-74)代入式(8-72), 则在行波状态下  $TE_{10}$  模的传输功率为

$$P = \frac{1}{2Z_{TE_{10}}} \int_0^a \int_0^b E_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \frac{ab}{4\eta} E_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (8-75)$$

式中  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  为无限介质中的波阻抗。设  $E_{br}$  为波导中填充介质的击穿电场强度, 即介质所能承受的最大电场强度, 将式(8-75)中的  $E_0$  用  $E_{br}$  代替, 则在行波状态下  $TE_{10}$  模传输的极限功率  $P_{br}$  为

$$P_{br} = \frac{ab}{4\eta} E_{br}^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (8-76)$$

这也就是在行波状态下,  $TE_{10}$  模的击穿功率。由此可以看出, 在矩形波导中  $TE_{10}$  模的击穿功率与波导尺寸、波导中填充介质的击穿场强以及工作频率有关。显然, 波导尺寸越大, 填充介质的击穿场强越高, 则击穿功率也就越大。图 8-15 给出了在矩形波导中击穿功率  $P_{br}$  与工作波长和  $TE_{10}$  模截止波长之比的关系曲线。由图可知, 频率越高,  $\lambda/\lambda_{c_{H_{10}}}$  值越小, 击穿功率越大; 当频率接近  $TE_{10}$  模的截止频率时, 击穿功率急剧下降, 并趋于零; 当  $\lambda/\lambda_{c_{H_{10}}} < 0.5$  时, 又会出现高次模。因此, 当用  $TE_{10}$  模传输功率时, 应使工作波长在  $0.5\lambda_c < \lambda < 0.9\lambda_c$  的范围内。

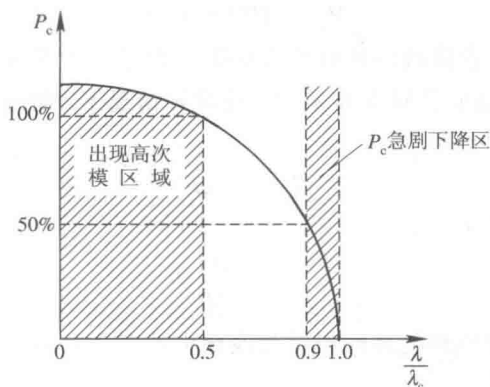


图 8-15 矩形波导功率容量与波长的关系

对于矩形波导中的其它模式,以及圆柱波导中的传输功率和击穿功率,可以仿照上述方法求出。

通过上面的分析,我们得到了在行波工作状态下  $TE_{10}$  模的击穿功率。在实际应用中,由于传输线终端难以完全匹配,传输线处于行驻波工作状态(而有部分反射波存在),此时驻波系数  $\rho > 1$ ,这时击穿功率可减小到:

$$P'_{br} = \frac{P_{br}}{\rho} \quad (8-77)$$

事实上,波导的击穿功率还与其它因素有关。如波导内表面不干净,有毛刺或出现不均匀性等等,都会使波导的击穿功率进一步降低。为使波导能安全地工作,通常把传输线允许通过的功率  $P_t$  规定为

$$P_t = \left( \frac{1}{3} \sim \frac{1}{5} \right) P'_{br} \quad (8-78)$$

$P_t$  即是波导的功率容量。

#### 8.4.2 波导的损耗和衰减

在以上各节的分析中,都是假设波导壁是完全理想的导电面,波导中填充的介质是完全理想的无损耗介质,因此电磁波在波导中传输时,没有电磁能量的损失。电磁波在传输过程中,其振幅不变。实际上,电磁波在波导中传输时,是有功率损耗的,这种功率损耗包括波导管壁有限电导率引起的损耗和填充介质的损耗。由于电磁波在波导中传输时有功率损耗,电磁波的振幅随着传输距离的增加而逐渐衰减。

在考虑损耗的波导中,电磁波的传输常数是复数,即  $\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + jk_z$ , 此时电磁波的场矢量为

$$\mathbf{E}(u_1, u_2, z) = [\mathbf{E}'(u_1, u_2)e^{-\alpha z}]e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-79a)$$

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, z) = [\mathbf{H}'(u_1, u_2)e^{-\alpha z}]e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (8-79b)$$

式中  $\mathbf{E}'(u_1, u_2)e^{-\alpha z}$  和  $\mathbf{H}'(u_1, u_2)e^{-\alpha z}$  是场矢量的振幅。显然电磁波每传输一个单位距离,场矢量的振幅是原来值的  $e^{-\alpha z}$  倍,而电磁波所携带的功率则是原来值的  $e^{-2\alpha}$  倍。设在  $z$  处通过波导横截面的功率为  $P$ ,则传输一个单位距离所损耗的功率  $P_L$  为

$$P_L = P(1 - e^{-2\alpha}) \quad (8-80)$$

在一般情况下,波导中任意横截面处的传输功率  $P$  总是远大于该处单位长度波导中损耗的功率  $P_L$ ,即  $P \gg P_L$ ,这说明衰减常数  $\alpha \ll 1$ 。在此种情况下,将  $e^{-2\alpha}$  展成幂级数,并取前两项作近似,则式(8-80)可简化为

$$P_L \approx 2\alpha P$$

由此可得衰减常数的近似表示式为

$$\alpha = \frac{P_L}{2P} \quad (8-81)$$

因此波导的损耗包括波导内壁导体的损耗和波导中填充介质的损耗。下面分别计算与这两种损耗相对应的衰减常数。

##### 1. 波导内壁导体损耗引起的衰减常数 $\alpha_c$

若要计算  $\alpha_c$ ,必须先计算传输功率  $P$  和损耗功率  $P_L$ 。由电磁场理论可知,这两部分功

率分别为

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (8-82)$$

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_{S_0} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (8-83)$$

在式(8-82)中,  $S$  是  $z$  处波导的横截面, 微分面元矢量  $d\mathbf{S}$  的方向为  $+z$  方向。在式(8-83)中,  $S_0$  是  $z$  处单位长波导的侧面积, 微分面元矢量  $d\mathbf{S}$  的方向是波导侧面内法线方向,  $\mathbf{E}_t$  和  $\mathbf{H}_t$  是波导侧面上的电场强度和磁场强度的切向分量。由于波导壁电导率为有限值, 因此上面两式中的场量均是有限导电率边界条件的亥姆霍兹方程的解。由于在有限导电率边界条件下求解亥姆霍兹方程很困难, 一般按以下方法作近似的计算。

假定波导壁的非理想导电特性不改变波导中电磁场的分布, 也不改变波导内壁上的磁场, 仅使波导内壁处的电场产生了切向分量。此时可以用具有理想导体内壁的波导中的场来代替式(8-82)和式(8-83)中的场。用这种近似的方法所得到的结果与实验结果十分接近。

按上述方程计算, 则

$$P = \frac{Z}{2} \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS \quad (8-84)$$

$$P_L = \frac{R_s}{2} \oint_l |\mathbf{H}_t|^2 dl \quad (8-85)$$

式中:  $Z$  为传输模的波阻抗;  $R_s$  为金属材料的表面电阻。将式(8-84)和式(8-85)代入式(8-81), 可得

$$\alpha_c = \frac{R_s \oint_l |\mathbf{H}_t|^2 dl}{2Z \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS} \quad (\text{Np/m}) \quad (8-86)$$

对于矩形波导中的  $\text{TE}_{10}$  模, 其衰减常数  $\alpha_c$  的计算, 可将  $\text{TE}_{10}$  模的磁场分量代入式(8-84)和式(8-85)中, 作积分可得

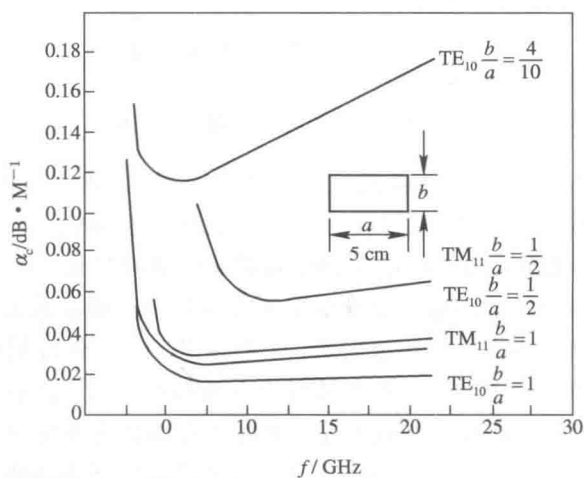
$$\begin{aligned} \oint_l |\mathbf{H}_t|^2 dl &= 2 \int_0^a (H_x^2 + H_z^2) |_{y=0} dx + 2 \int_0^b H_z^2 |_{x=0} dy \\ &= aH_0^2 \left[ \left( \frac{ak_z}{\pi} \right)^2 + 1 \right] + 2bH_0^2 \\ \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS &= \int_0^a \int_0^b H_x dx dy = \frac{ab}{2} \left( \frac{ak_z}{\pi} \right)^2 H_0^2 \end{aligned}$$

因此矩形波导传输  $\text{TE}_{10}$  模时的衰减常数为

$$\alpha_{c_{\text{TE}_{10}}} = \frac{R_s}{b \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \cdot \left[ 1 - \frac{2b}{a} \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \quad (8-87)$$

图 8-16 给出了矩形波导传输  $\text{TE}_{10}$  模时衰减常数  $\alpha_c$  的特性曲线。由图可知, 波导宽边尺寸  $a$  确定后, 窄边尺寸  $b$  越大, 其  $\alpha_c$  越小; 在截止频率附近  $\alpha_c$  急剧增加, 因此在使用矩形波导传输电磁波时, 不能把工作频率选在截止频率附近。

仿照计算  $\alpha_{c_{\text{TE}_{10}}}$  的办法, 可以求出矩形波导传输其它模式以及圆柱波导各传输模的衰减常数。

图 8-16 矩形波导中  $TE_{10}$  模的  $\alpha_c$  特性曲线

## 2. 波导中填充介质的损耗引起的衰减常数 $\alpha_d$

当波导中填充非理想介质时, 介质中将损耗部分功率, 使得电磁波在传输过程中衰减。波导中非理想介质引起的损耗包括两部分: 一部分是由介质电导率不等于零, 即  $\sigma \neq 0$  而引起的; 另一部分是由介质极化阻尼而引起的。

介质电导率不为零引起的衰减常数  $\alpha_{dc}$  由传输常数  $\gamma$  的表示式可以导出, 其  $\alpha_{dc}$  为

$$\alpha_{dc} = \frac{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \pi \tan \delta_c}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (8-88)$$

式中  $\tan \delta_c = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  称为导电介质损耗角正切。

介质极化阻尼损耗引起的衰减常数  $\alpha_{de}$  为

$$\alpha_{de} = \frac{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \pi \tan \delta_e}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (8-89)$$

式中  $\tan \delta_e = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$  称为介质损耗角正切。

以上的分析表明, 对于空气填充的波导, 其损耗是由波导壁有限电导率引起的, 衰减系数  $\alpha = \alpha_c$ ; 对于非理想介质填充的波导, 不仅有波导壁引起的损耗, 而且还有介质引起的损耗, 其衰减常数  $\alpha = \alpha_c + \alpha_{dc} + \alpha_{de}$ 。

## 8.5 同 轴 线

同轴线的结构如图 8-17 所示, 其导波装置是双导体结构, 传输电磁波的主模式是 TEM 波。从场的观点看, 同轴线的边界条件既能支持 TEM 波传输, 也能支持 TE 波或

TM 波传输。究竟哪些波能在同轴线中传输,则取决于同轴线的尺寸和电磁波的频率。

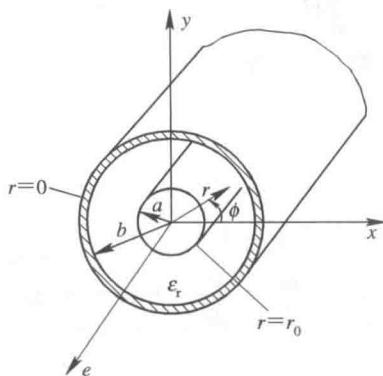


图 8-17 同轴线的结构与坐标

同轴线是一种宽频带的导波装置。当工作波长大于 10 cm 时,矩形波导和圆柱形波导就显得尺寸过大而笨重,而相应的同轴线却不大。同轴线的特点之一是可以从直流一直工作到毫米波波段,因此无论在微波整机系统、微波测量系统或微波元件中,同轴线都得到广泛的应用。

### 8.5.1 同轴线主模 TEM 波的性质

#### 1. 同轴线中的场方程

求解同轴线中 TEM 波的场分量,就是在圆柱坐标系下求解横向分布函数(电位函数)  $\varphi(r, \phi)$  所满足的拉普拉斯方程式(8-22),即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (8-90)$$

由于对称性,可认为  $\varphi$  沿坐标  $\phi$  均匀分布,  $\varphi$  仅是坐标  $r$  的函数,因此上式中对  $\phi$  的偏导数应为零,式(8-90)可简化为常微分方程式:

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (8-91)$$

该方程的一般解为

$$\varphi = B_0 - B_1 \ln r \quad (8-92)$$

将  $\varphi$  以及式(8-22d)代入式(8-22a),可得到同轴线中 TEM 波的横向场分量为

$$\begin{cases} E_r = \frac{E_0}{r} e^{-j\beta z} \\ H_\phi = \frac{E_0}{\eta r} e^{-j\beta z} \end{cases} \quad (8-93)$$

式中:  $E_0$  是电场的振幅;  $\eta$  是 TEM 波的波阻抗。

#### 2. 传输参数

设同轴线内、外导体之间的电压为  $U(z)$ , 内导体上的轴向电流为  $I(z)$ , 则由式(8-93)可求得

$$U(z) = \int_a^b E_r dr = E_0 \ln \frac{b}{a} e^{-j\beta z} \quad (8-94)$$

$$I(z) = \oint H_\phi dl = \int_0^{2\pi} r H_\phi d\phi = \frac{2\pi E_0}{\eta} e^{-j\beta z} \quad (8-95)$$

由特性阻抗的定义可知其特性阻抗  $Z_0$  为

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \quad (8-96a)$$

其相移常数  $\beta$  和相速  $v_p$  分别为

$$\beta = k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (8-96b)$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (v_0 = \text{光速}) \quad (8-96c)$$

其波导波长(相波长)为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (8-96d)$$

式中  $\epsilon_r$  为同轴线中填充介质的相对介电常数。

### 3. 传输功率与衰减

设  $z=0$  时, 内、外导体之间的电压为  $U_0$ , 则从式(8-94)可得

$$E_0 = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

将上式代入式(8-93)可得

$$E_r = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \quad (8-97a)$$

$$H_\phi = \frac{U_0}{\eta \ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \quad (8-97b)$$

将上式代入式(8-13)可得同轴线传输 TEM 波的平均功率:

$$P = \frac{1}{2\eta} \int_s |E_t|^2 = \frac{1}{2\eta} \int_a^b |E_t|^2 2\pi r dr = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\eta} \frac{|U_0|^2}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{1}{2} \frac{|U_0|^2}{Z_0} \quad (8-98)$$

同轴线的功率容量  $P_{br}$  可按式计算:

$$P_{br} = \frac{1}{2} \frac{|U_{br}|^2}{Z_0}$$

式中  $U_{br}$  为击穿电压, 由击穿电场强度  $E_{br}$  决定。由于同轴线内电场强度在  $r=a$  处最强, 因此由式(8-97)可得  $U_{br}$  与  $E_{br}$  的关系:

$$|U_{br}| = a E_{br} \ln \frac{b}{a}$$

故功率容量的计算公式可写成

$$P_{br} = \sqrt{\epsilon_r} \frac{a^2 E_{br}^2}{120} \ln \frac{b}{a} \quad (8-99)$$

同轴线的衰减由两部分构成: 一部分是由导体损耗引起的衰减, 用  $\alpha_c$  表示; 另一部分

是由介质损耗引起的衰减,用  $\alpha_d$  表示。其计算公式为

$$\alpha_c = \frac{R_s}{2\eta} \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\ln \frac{b}{a}} \quad (\text{Np/m}) \quad (8-100a)$$

$$\alpha_d = \frac{\pi \sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} \tan \delta \quad (\text{Np/m}) \quad (8-100b)$$

式中:  $R_s = \left(\frac{\pi f \mu}{\sigma}\right)^{1/2}$  是导体的表面电阻;  $\tan \delta$  是同轴线中填充介质的损耗角正切。

### 8.5.2 同轴线中的高次模

若同轴线的尺寸与波长相比足够大时,同轴线上有可能传输 TE 波或 TM 波。因此有必要研究高阶模的场结构特点,以便在给定频率下选择合适的尺寸,保证在同轴线内可以抑制高阶模的产生,保证单模(TEM)传输。

对于同轴线内的 TE 或 TM 高阶模来说,其截止波数  $k_c$  所满足的方程都是超越方程,严格求解是很困难的,一般采用近似的方法得到其截止波长的近似表达式。对于 TM 波:

$$\lambda_c(E_{nm}) \approx \frac{2}{n}(b-a) \quad (n=1, 2, \dots)$$

最低波型为  $TM_{01}$ , 其截止波长  $\lambda_c(E_{01})=2(b-a)$ 。

当  $m \neq 0$ 、 $n=1$  时,对于 TE 波,其截止波长为

$$\lambda_c(H_{m1}) \approx \frac{\pi(a+b)}{m} \quad (m=1, 2, \dots)$$

最低波型为  $H_{11}$ , 其截止波长为

$$\lambda_c(H_{11}) \approx \pi(a+b)$$

在  $m=0$  时,  $TE_{01}$  模的截止波长为

$$\lambda_c(H_{01}) \approx 2(b-a)$$

### 8.5.3 同轴线尺寸的选择

确定同轴线尺寸时,主要考虑以下几方面的因素。

#### 1. 保证同轴线中单模(TEM)传输

为了保证在同轴线中只传输 TEM 波,其工作波长与同轴线尺寸的关系应满足:

$$\lambda > \lambda_c(H_{11}) \approx \pi(a+b)$$

#### 2. 保证传输电磁波能量时导体损耗最小

为了保证获得最小的导体损耗,将  $\alpha_c$  表达式(8-100a)中的  $b$  保持不变,对  $a$  求导并令  $\partial \alpha_c / \partial a = 0$ , 可求得  $\alpha_c$  取最小值时  $b/a$  的比值为

$$\frac{b}{a} \approx 3.59$$

此尺寸相应空气同轴线的特性阻抗约为  $77 \Omega$ 。

#### 3. 保证同轴线具有最大的功率容量

为了保证获得最大的功率容量,可将  $P_{br}$  的表达式(8-99)中的  $b$  保持不变,对  $a$  求导

并令  $\partial P_{br}/\partial a = 0$ , 可求得  $P_{br}$  取最大值时  $b/a$  的比值为

$$\frac{b}{a} \approx 1.65$$

此尺寸相应空气同轴线的特性阻抗约为  $33 \Omega$ 。

显然, 上述两种要求所对应的同轴线的特性阻抗值并不相同, 因此有必要兼顾考虑。一般情况下同轴线的特性阻抗取  $50 \Omega$  和  $75 \Omega$  两个标准值, 后者考虑的损耗小, 前者兼顾了损耗与功率容量的要求。

## 8.6 谐振腔

空腔谐振器(简称谐振腔)是微波系统中的一个最基本的元件, 在微波电路中起着储存电磁波的能量和选择电磁波频率的作用。谐振腔的结构形式很多, 既可用传输线构成, 也可用非传输线的特殊腔体构成。无论是何种结构的谐振腔, 要获得对其完整的理论描述, 必须从电磁场方程出发, 解其满足特定边界条件的电磁场方程, 所以电磁场理论是分析谐振腔的基本理论。本节主要分析谐振腔的基本特性, 给出电磁场分析的一些重要的结论。

### 8.6.1 空腔谐振器的一般概念

在低频电路中, 谐振电路是由集总元件电感  $L$  和电容  $C$  构成的。当工作频率逐渐升高时, 电感  $L$  和电容  $C$  值逐渐减小, 同时各种损耗如导体损耗、介质损耗和辐射损耗则不断增加, 以至在微波波段, 这种普通的  $LC$  电路就不能正常工作。这时由金属封闭的空腔谐振器和其它结构形式构成的谐振器成为微波谐振电路的主要形式。由集总参数  $LC$  电路向金属空腔谐振器过渡的形象化解释如图 8-18 所示。值得注意的是, 一旦形成封闭腔体之后, 就不能简单地认为上下底壁构成电容, 侧壁构成电感。

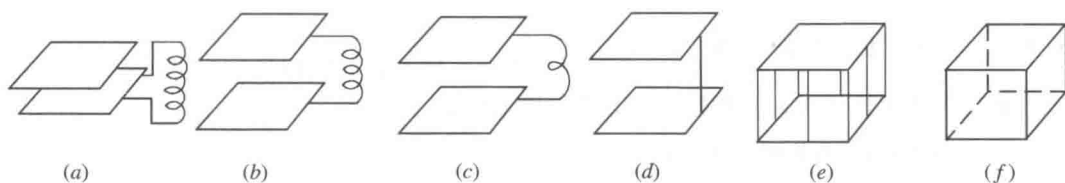


图 8-18 集总参数  $LC$  电路向空腔谐振器过渡

在金属空腔谐振器中电磁能量被封闭在金属腔体之中, 电能与磁能在封闭的空间中不断相互转换构成了谐振过程。振荡中导体壁的损耗和介质的损耗等效于一个欧姆电阻, 它决定了无载空腔谐振器的品质因数。空腔谐振器中电、磁能量的激励和耦合, 可以采用各种不同的结构形式, 这通常取决于谐振器中工作的模式。模式不同, 谐振器的激励与耦合结构也不同。

空腔谐振器的主要特性参数有: 谐振波长  $\lambda_0$  (或谐振频率  $f_0$ ); 固有品质因数  $Q_0$ ; 等效电导  $G_0$ 。当考虑到与外电路耦合时, 还有有载品质因数  $Q_L$ 、耦合系数  $\beta$  等。在这里我们仅对谐振腔的谐振波长  $\lambda_0$  和固有品质因数  $Q_0$  给予定义。



### 1. 谐振波长 $\lambda_0$

空腔谐振器的谐振波长  $\lambda_0$  是指在空腔谐振器中工作模式的电磁场发生谐振时的波长。这时谐振器内的电场能量的时间平均值与磁场能量的时间平均值相等。谐振波长  $\lambda_0$  取决于谐振器的结构形式、尺寸大小和工作模式。 $f_0 = v/\lambda_0$  (空气填充时,  $v$  为自由空间的光速) 称为谐振频率。

### 2. 固有品质因数 $Q_0$

品质因数  $Q$  是空腔谐振器的另一个重要参数, 它表征了空腔谐振器的频率选择性和谐振器能量损耗, 其定义为

$$Q = \omega_0 \frac{\text{系统中的平均储能}}{\text{系统中每秒的能量损耗}} = \frac{\omega_0 \bar{W}}{P_L} \quad (8-101)$$

一个与外界没有耦合的孤立空腔谐振器的品质因数称为固有品质因数, 以  $Q_0$  表示。对于孤立的空腔谐振器, 式(8-101)中系统中每秒的能量损耗仅包括空腔谐振器本身的损耗, 如导体损耗和介质损耗等。

从式(8-101)可知, 为了计算空腔谐振器的固有品质因数  $Q_0$ , 必须计算空腔谐振器的平均储能和功率损耗。由于计算  $Q_0$  涉及有耗系统, 而有耗空腔谐振器中的电磁场分布与无耗理想空腔谐振器中的电磁场分布是不相同的, 因此严格求解空腔谐振器的  $Q_0$  比较复杂, 在工程上常采用微扰法来作近似计算。根据微扰法, 认为空腔谐振器中导体和介质的损耗并不改变谐振器中的电磁场分布, 故可以用理想谐振器中的电磁场分布来计算。这对小损耗的空腔谐振器是适宜的。由于一般空腔谐振器的固有品质因数都很高, 损耗很小, 所以可以采用此方法。

谐振器中储存能量的时间平均值  $\bar{W}$ , 在计算时可以用磁场能量, 也可以用电场能量表示。对于金属空腔谐振器, 为了与计算功率损耗  $P_L$  统一起来, 可采用磁场表示。当场量用瞬时值定义时, 总储能的时间平均值为

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \epsilon_1 \int |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \mu_1 \int |\mathbf{H}|^2 dV \quad (8-102)$$

式中:  $\epsilon_1$  为谐振器内部介质的介电常数;  $\mu_1$  为介质的磁导率;  $V$  为谐振器的体积。对于孤立的金属空腔谐振器, 其损耗主要来自导体壁的损耗, 所以  $P_L$  为

$$P_L = \frac{1}{2} \oint_S |\mathbf{J}_s|^2 R_s dS = \frac{1}{2} R_s \oint_S |\mathbf{H}_t|^2 dS \quad (8-103)$$

式中:  $\mathbf{J}_s$  为腔体壁的面电流密度矢量;  $R_s$  为表面电阻率;  $\mathbf{H}_t$  为腔壁表面切向磁场。将式(8-102)和式(8-103)代入式(8-101), 得

$$Q_0 = \frac{\omega_0 \mu_1 \iiint_V |\mathbf{H}|^2 dV}{R_s \oint_S |\mathbf{H}_t|^2 dS} \quad (8-104)$$

由于

$$R_s = \frac{1}{\sigma_2 \delta}$$

所以式(8-104)也可以写成

$$Q_0 = \frac{2 \oint_V |\mathbf{H}|^2 dV}{\oint_S |\mathbf{H}_t|^2 dS} \quad (8-105)$$

式中  $\delta$  为导体壁金属的集肤深度。式(8-104)和式(8-105)是计算空腔谐振器固有品质因数的一般公式。

## 8.6.2 矩形空腔谐振器

一个横截面尺寸为  $a \times b$  的矩形金属波导, 当在长度为  $l$  的两端用金属导体封闭时, 就可构成一个矩形空腔谐振器。电场和磁场能量被储存在腔体内, 功率损耗由腔体的金属壁与腔体内填充介质引起。谐振腔与外界的孔耦合可由腔体壁上的小孔或腔内的探针(或耦合环)来完成, 其结构如图 8-19 所示。我们首先求解谐振腔在无耗情况下的谐振频率, 然后用微扰法求其固有品质因数  $Q_0$ 。

### 1. 谐振频率

矩形波导谐振腔内的场分量可由入射波和反射波叠加来求得。由 8.2 节得知, 在矩形波导中  $\text{TE}_{mn}$  模或  $\text{TM}_{mn}$  模的横向电场( $E_x, E_y$ )可以写成

$$E(x, y, z) = E_0(x, y)[A^+ e^{-jk_z z} + A^- e^{jk_z z}] \quad (8-106)$$

式中:  $E_0(x, y)$  为该模式横向电场的横向坐标函数;  $A^+$ 、 $A^-$  分别为正向和反向行波的任意振幅系数。 $\text{TE}_{mn}$  和  $\text{TM}_{mn}$  的传输系数为

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (8-107)$$

式中:  $k_0 = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ ;  $\mu$  和  $\epsilon$  是腔体内填充介质的磁导率和介电常数。

将  $z=0$  处的边界条件  $E_t=0$  代入式(8-106), 得到  $A^+ = A^-$ , 再将  $z=l$  处的边界条件  $E_t=0$  代入式(8-106), 可得  $E(x, y, l) = -E_0(x, y)2jA^+ \sin k_z l = 0$ 。由此可得

$$k_z = \frac{p\pi}{l} \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

这表明, 谐振腔的长度必须为半波导波长的整数倍。由此得矩形波导谐振腔的谐振波数为

$$k_{mnp}^2 = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \quad (8-108)$$

这样与矩形波导的模式相对应, 矩形谐振腔可以存在无限多个  $\text{TE}_{mnp}$  模和  $\text{TM}_{mnp}$  模, 下标  $m$ 、 $n$ 、 $p$  分别表示沿  $a$ 、 $b$ 、 $l$  分布的半驻波数。 $\text{TE}_{mnp}$  模和  $\text{TM}_{mnp}$  模的谐振频率为

$$f_{0mnp} = \frac{vk_{0mnp}}{2\pi} = \frac{c}{2\pi \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \quad (8-109)$$

式中  $c$  为真空中的光速。最低的谐振频率或最长的谐振波长为谐振腔的主模。矩形波导谐振腔的主模是  $\text{TE}_{10p}$  模, 其谐振频率为

$$f_{10p} = \frac{c}{2\pi \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \quad (8-110)$$

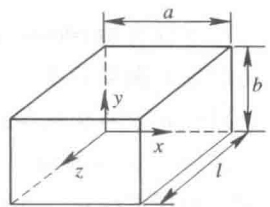


图 8-19 矩形波导谐振腔

## 2. $TE_{10p}$ 模的固有品质因数 $Q_0$

实用的矩形波导谐振腔几乎都是以  $TE_{10p}$  模工作的, 其固有品质因数  $Q_0$  可按式 (8-105) 计算。

由 8.2 节的结果和式 (8-107) 以及  $A^+ = A^-$ , 可求得矩形波导腔  $TE_{10p}$  模的电磁场分量为

$$E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{p\pi z}{l} \quad (8-111a)$$

$$H_x = -\frac{jE_0}{Z_{TE_{10}}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{p\pi z}{l} \quad (8-111b)$$

$$H_z = \frac{j\pi E_0}{k\eta a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{p\pi z}{l} \quad (8-111c)$$

据此可画出  $TE_{101}$  模的场结构如图 8-20 所示。

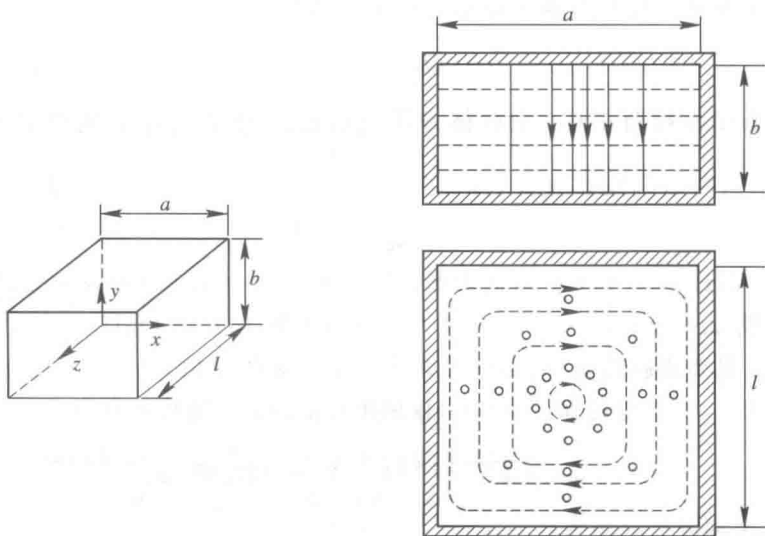


图 8-20  $TE_{101}$  模的场结构

$TE_{10p}$  模的电场储能为

$$\bar{W}_e = \frac{\epsilon}{4} \iiint_V |E_y|^2 dV = \frac{\epsilon abl}{16} E_0^2$$

磁场的储能为

$$\begin{aligned} \bar{W}_m &= \frac{\mu}{4} \iiint_V (H_x H_x^* + H_z H_z^*) dV = \frac{\mu abl}{16} E_0^2 \left( \frac{1}{Z_{TE_{10}}^2} + \frac{\pi^2}{k^2 \eta^2 a^2} \right) \\ &= \frac{\epsilon abl}{16} E_0^2 \end{aligned}$$

因此有  $\bar{W}_m = \bar{W}_e$ , 也就是说矩形谐振腔内电场储能与磁场储能相等。这证明了我们前面讲过的结论。

对小损耗情况, 我们可以采用微扰法来求腔体内壁的功率损耗。由式 (8-103) 知:

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} R_s \oint_S | \mathbf{H}_t |^2 dS \\
 &= \frac{R_s}{2} \{ 2 \int_0^a \int_0^b | H_x(z=0) |^2 dx dy + 2 \int_0^l \int_0^b | H_z(x=0) |^2 dz dy + \\
 &\quad 2 \int_0^l \int_0^a [ | H_x(y=0) |^2 + | H_z(y=0) |^2 ] dx dz \} \\
 &= \frac{R_s \lambda_0^2 E_0^2}{8 \eta^2} \left( \frac{p^2 ab}{l^2} + \frac{bl}{a^2} + \frac{p^2 a}{2l} + \frac{l}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

将  $\bar{W}_e$  和  $P_L$  代入式(8-101)或式(8-104), 可得矩形谐振腔  $TE_{10p}$  模的固有品质因数  $Q_0$  为

$$Q_0 = \frac{\omega_0 \bar{W}_m}{R_L} = \frac{(kal)^3 b \eta}{2 \pi^2 R_s (2 p^2 a^3 b + 2 b l^3 + p^2 a^3 l + a l^3)} \quad (8-112)$$

一般情况下, 矩形波导谐振腔的填充介质为干燥的空气, 介质损耗不计。若填充的介质为有耗介质, 其有耗介质引起的  $Q$  值为  $Q_d$ , 其值为

$$Q_d = \frac{1}{\tan \delta} \quad (8-113)$$

式中,  $\tan \delta$  为介质损耗角正切。由腔体导体壁引起的  $Q$  值为  $Q_c$ , 则总的固有品质因数  $Q_0$  为

$$Q_0 = \left( \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} \right)^{-1} \quad (8-114)$$

**例 8-1** 用 BJ-48 铜波导做成矩形波导谐振腔,  $a=4.775 \text{ cm}$ ,  $b=2.215 \text{ cm}$ , 腔内填充聚乙烯介质( $\epsilon_r=2.25$ ,  $\tan \delta=4 \times 10^{-4}$ ), 其谐振频率  $f_0=5 \text{ GHz}$ 。若谐振模式分别为  $TE_{101}$  或  $TE_{102}$ , 其要求腔长应为多少, 并求出它们的无载  $Q$  值。

**解:** 当用 BJ-48 波导传输  $f_0=5 \text{ GHz}$  的电磁波时, 其波数  $k$  应为

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{2 \pi f_0 \sqrt{\epsilon_r}}{c} = 157.08 \text{ m}^{-1}$$

由式(8-110)得到谐振时的腔长  $l(m=1, n=0)$  为

$$l = \frac{p \pi}{\sqrt{k^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2}}$$

当工作在  $TE_{101}$  模式时, 其腔长应取为

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{(157.08)^2 - \left( \frac{\pi}{0.04775} \right)^2}} = 2.204 \text{ cm}$$

当工作在  $TE_{102}$  模式时, 其腔长应取为

$$l = \frac{2 \pi}{\sqrt{(157.08)^2 - \left( \frac{\pi}{0.04775} \right)^2}} = 4.409 \text{ cm}$$

铜的导电率  $\sigma=5.813 \times 10^7 \text{ S/m}$ , 则表面电阻为

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma}} = 1.84 \times 10^{-2} \Omega$$

而

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} = 251.3 \Omega$$

于是可根据式(8-112)计算导体损耗的  $Q$  值。对于  $TE_{101}$  模式:

$$Q_c = 3380$$

对于  $TE_{102}$  模式:

$$Q_c = 3864$$

根据式(8-113)计算介质损耗的  $Q$  值。对于  $TE_{101}$  模和  $TE_{102}$  模式其介质损耗的  $Q$  值为

$$Q_d = \frac{1}{\tan \delta} = 2500$$

根据式(8-114)计算总的无载  $Q$  值。对于  $TE_{101}$  模式:

$$Q_0 = \left( \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} \right)^{-1} = 1437$$

对于  $TE_{102}$  模式:

$$Q_0 = \left( \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} \right)^{-1} = 1518$$

计算结果表明,介质损耗对  $Q$  值有着重要的影响。因此要求高  $Q$  值谐振腔时,一般采用空气填充的谐振腔。

### 8.6.3 圆柱形谐振腔

圆柱形谐振腔是由一段长度为  $l$  两端短路的圆波导构成的,如图 8-21 所示。实用的圆柱形谐振腔常用作微波波长计,其顶端做成可调短路活塞,通过调节其长度可对不同频率调谐。谐振腔通过小孔或耦合环与外界耦合。

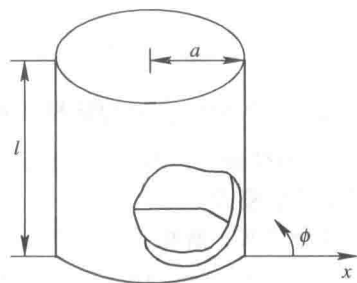


图 8-21 圆柱形波导谐振腔

#### 1. 谐振频率

圆柱形谐振腔中振荡模式的电磁场分量可用圆柱波导的解并考虑反射波而得到。其纵向场分量可以写成如下形式。

对于 TE 模:

$$H_z = A_{mn} J_m(k_c r) \cos m\phi [c_1 \cos(k_z z) + c_2 \sin(k_z z)] \quad (8-115)$$

式中,  $k_c = x'_{mn}/a$ ,  $x'_{mn}$  是第一类  $m$  阶贝塞尔函数导数的第  $n$  个根。利用边界条件  $z=0$  和  $z=l$  处  $H_z=0$ , 可得

$$c_1 = 0, k_{zmn} = \frac{p\pi}{l} \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

对于 TM 模,其纵向场分量为

$$E_z = A'_{mn} J_m(k_c r) \cos m\phi [c_1 \cos(k_z z) + c_2 \sin(k_z z)] \quad (8-116)$$

采用与 TE 模同样的方法可以确定:

$$c_2 = 0, k_{zmn} = \frac{p\pi}{l} \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

在 8.3 节中, 已经给出:

$$k_{zmn} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2} \quad (\text{TE 模})$$

$$k_{zmn} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2} \quad (\text{TM 模})$$

在谐振腔中, 有

$$k_{zmn} = \frac{p\pi}{l}$$

所以谐振腔波数应为

$$\begin{cases} k_0 = \sqrt{k_{zmn}^2 + \left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2} & (\text{TE 模}) \\ k_0 = \sqrt{k_{zmn}^2 + \left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2} & (\text{TM 模}) \end{cases} \quad (8-117)$$

由此可以看出, 谐振时圆柱谐振腔可以存在无穷多个 TE 模和 TM 模, 记为  $\text{TE}_{mnp}$  模和  $\text{TM}_{mnp}$  模, 下标  $p$  表示场沿  $z$  方向分布的半波数。

由式(8-117)可以求出圆柱谐振腔的谐振频率应为

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \quad (\text{TE}_{mnp} \text{ 模}) \quad (8-118a)$$

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \quad (\text{TM}_{mnp} \text{ 模}) \quad (8-118b)$$

## 2. 三个常用模式的圆柱谐振腔

与圆柱波导的模式相对应, 在圆柱波导谐振腔模式中, 较实用的是  $\text{TE}_{111}$ 、 $\text{TM}_{010}$  和  $\text{TE}_{011}$  三个模式。

(1)  $\text{TE}_{111}$  谐振模: 工作于  $\text{TE}_{111}$  模的圆柱形谐振腔场结构如图 8-22(a) 所示。将  $m=1$ 、 $n=1$ 、 $p=1$  代入式(8-118a), 谐振腔中填充空气, 其谐振频率为

$$f_{\text{TE}_{111}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1.841}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}$$

谐振腔波长为

$$\lambda_0(\text{TE}_{111}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3.41a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2}}$$

由谐振频率或谐振波长的表达式可以看出, 谐振频率与谐振腔长度  $l$  有关, 因此可以采用短路活塞来调节长度从而进行调谐。当  $l > 2.1a$  时, 此模式是圆柱形谐振腔主模, 故单模工作的频率较宽, 但容易出现极化简并现象, 使其应用受到一定限制。

工作于  $\text{TE}_{111}$  模的圆柱形谐振腔的无载  $Q$  值为

$$Q_0 = \frac{\lambda_0}{\delta} \frac{1.03 \left[ 0.343 - \left(\frac{R}{l}\right)^2 \right]}{1 + 5.82 \left(\frac{a}{l}\right)^2 + 0.86 \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{R}{l}\right)}$$

式中  $\delta$  为金属导体的集肤深度。

(2)  $TM_{010}$  模式：当  $l < 2.1a$  时， $TM_{010}$  模式是圆柱形谐振腔的主模，其谐振频率和谐振波长为

$$f_0(TM_{010}) = \frac{2.405c}{2\pi a}$$

$$\lambda_0(TM_{010}) = 2.62a$$

由上述公式可见，谐振频率与腔长  $l$  无关，因此不能采用短路活塞进行调谐。由于  $TM_{010}$  模式的电场与磁场分别集中在中心轴和圆柱壁附近，因此  $TM_{010}$  模式圆柱谐振腔常用于介质参数测量的微扰腔。其场结构如图 8-22(b) 所示。

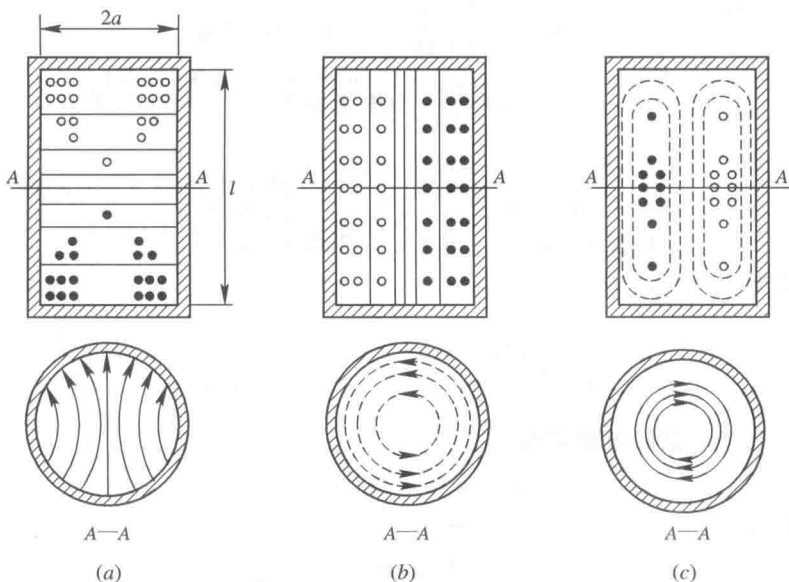


图 8-22 圆柱谐振腔三个常用模式的场结构

(a)  $TE_{11}$  模；(b)  $TM_{010}$  模；(c)  $TE_{011}$  模

圆柱谐振腔  $TM_{010}$  模式的无载  $Q$  值为

$$Q_0 = \frac{\lambda_0}{\delta} \frac{2.405}{2\pi \left(1 + \frac{a}{l}\right)}$$

若取  $a/l=1$ ， $\lambda_0=3\text{ cm}$  及  $\delta=0.66 \times 10^{-4}\text{ cm}$ ，其无载  $Q$  值就为 8600。

(3)  $TE_{011}$  模式：工作于  $TE_{011}$  模式的圆柱形谐振腔的谐振频率和谐振波长为

$$f_0(TE_{011}) = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{3.832}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}$$

$$\lambda_0(TE_{011}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1.64a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2}}$$

由上述公式可见谐振频率与腔长  $l$  有关，可采用短路活塞调节长度  $l$  来进行调谐。其场结构如图 8-22(c) 所示。

TE<sub>011</sub>模在圆柱形谐振腔中虽不是最低模式,但它的无载Q值最高,是TE<sub>111</sub>模圆柱形谐振腔Q值的两倍到三倍,因此这种模式适用于作为高精度的稳频腔和波长计的工作模式。其Q值为

$$Q_0 = \frac{\lambda_0}{\delta} \frac{0.336 \left[ 1.49 + \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{1 + 1.34 \left( \frac{R}{l} \right)^3}$$

**例 8-2** 直径  $d=2a=l$  的铜制 TE<sub>011</sub> 模式圆柱形谐振腔,腔内填充空气,谐振频率为 5 GHz,求谐振腔尺寸与 Q 值。

**解:** 谐振波长为

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \times 10^{10}}{5 \times 10^9} = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} = 104.7 \text{ m}^{-1}$$

谐振频率为

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left( \frac{3.832}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left( \frac{3.832}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2}$$

于是腔体半径为

$$a = \frac{\sqrt{(3.832)^2 + \left( \frac{\pi}{2} \right)^2}}{k} = 3.96 \text{ cm}$$

在频率为 5 GHz 时,铜的电导率为

$$\sigma = 5.813 \times 10^7 \text{ S/m}$$

所以表面电阻为

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} = 0.0184 \text{ } \Omega$$

集肤深度为

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} = 0.093 \text{ } 35 \times 10^{-5} \text{ m}$$

TE<sub>011</sub>圆柱形谐振腔的Q值为

$$Q_0 = 42 \text{ } 400$$

与例 8-1 工作在相同频率的 TE<sub>101</sub> 模式的矩形谐振腔的 Q 值 3380 相比,可见 TE<sub>011</sub> 模圆柱形谐振腔的 Q 值高得多。

### 小 结

(1) 不同的导波装置可以传输不同模式的电磁波。TEM 波模式只能存在于多导体传输系统中,其场的求解可看成二维静止场问题的求解,即将横向电场  $\mathbf{E}_t$  用标量位  $\varphi(u_1, u_2)$  的横向梯度表示。求解标量位  $\varphi(u_1, u_2)$  满足的二维拉普拉斯方程,就可以求出各横向场的



表示式。在波导中不能传输 TEM 波，只能传输 TM 波或 TE 波。

(2) TEM 波不存在截止频率，而 TM 波和 TE 波存在截止频率。其截止频率  $f_c$  和截止波长  $\lambda_c$  为

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c}$$

在理想导波装置中的波导波长  $\lambda_g$ 、相速  $v_p$  及群速  $v_g$  为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}, \quad v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}, \quad v_g = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} v$$

在理想导波装置中，TEM 波的波阻抗  $Z_{\text{TEM}}$ 、TM 波的波阻抗  $Z_{\text{TM}}$  及 TE 波的波阻抗  $Z_{\text{TE}}$  为

$$Z_{\text{TEM}} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad Z_{\text{TM}} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \eta\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}, \quad Z_{\text{TE}} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

(3) 在矩形波导中，其截止波数  $k_c$ 、截止波长  $\lambda_c$  为

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

TE<sub>10</sub> 波的  $\lambda_g$ 、 $v_p$ 、 $v_g$  为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad v_g = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} v$$

(4) 在矩形波导中 TE<sub>10</sub> 波具有最小衰减，在圆柱形波导中 TE<sub>11</sub> 波具有最小衰减。当频率升高时，圆柱形波导中的 TE<sub>01</sub> 波的衰减减小，圆柱形波导 TE<sub>01</sub> 波的这一特点使它特别适合于远距离传输。

(5) 同轴线是传输 TEM 波的导波装置，其特性阻抗  $Z_0$  为

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a}$$

它可以用场理论进行分析，也可以用路理论进行分析。后者较为简单，可认为是场理论在特定条件下的一种近似处理方法。

(6) 谐振腔是频率很高时采用的谐振电路。谐振腔内可以有无限个谐振模式，每一种模式对应一个谐振频率。谐振腔的 Q 值比较高。

## 习 题 八

- 8-1 什么叫截止波长？为什么只有  $\lambda < \lambda_c$  的波才能在波导中传输？
- 8-2 何谓工作波长、截止波长和波导波长？它们有何区别和联系？
- 8-3 何谓相速和群速？为什么空气填充波导中波的相速大于光速，群速小于光速？

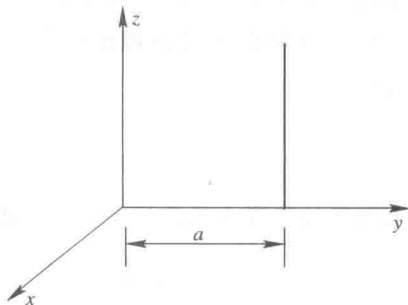
8-4 如图所示, 两块无限大金属板, 相距为  $a$ , 已知其中沿  $z$  方向电磁场分量为

$$H_z = H_{zm}(A \cos k_x x + B \sin k_x x) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0$$

(1) 求其余各场分量, 说明该系统传什么波, 其截止波长为多少?

(2) 画出金属板上传导电流分布。



习题 8-4 图

8-5 何谓波导的色散特性? 波导为什么存在色散特性?

8-6 矩形波导中波型指数  $m$  和  $n$  的物理意义如何? 矩形波导中波型的场结构的规律怎样?

8-7 矩形波导中的  $v_p$ 、 $v_g$ 、 $\lambda_c$  和  $\lambda_g$  有何区别与联系? 它们与哪些因素有关?

8-8 今用 BJ-32(72.14 mm × 34.04 mm) 作为馈线:

(1) 当工作波长为 6 cm 时, 波导中能传输哪些波型?

(2) 今测得波导中传输  $H_{10}$  模时两波节点的距离为 10.9 cm, 求  $\lambda_g$  和  $\lambda$ 。

(3) 在波导中传输  $H_{10}$  模时,  $\lambda_0 = 10$  cm, 求  $v_p$ 、 $v_g$ 、 $\lambda_c$  和  $\lambda_g$ 。

8-9 用 BJ-100(22.86 mm × 10.16 mm) 作馈线时, 其工作频率为 10 GHz:

(1) 求  $\lambda_c$ 、 $\lambda_g$ 、 $\beta$  和  $Z$ 。

(2) 若波导宽边尺寸增大一倍, 问上述参数将如何变化?

(3) 若波导窄边尺寸增大一倍, 问上述参数将如何变化?

(4) 若波导尺寸不变, 工作频率为 15 GHz, 上述参数又将如何变化?

8-10 圆柱形波导中的波型指数  $m$  和  $n$  的意义如何? 为什么不存在  $n=0$  的波型? 圆波导中波型场结构的规律如何?

8-11 圆波导中  $H_{11}$ 、 $H_{01}$  和  $E_{01}$  模的特点是什么? 有何应用?

8-12 何谓波导的简并? 矩形波导和圆波导中的简并有何异同?

8-13 一空气填充的圆波导中传输  $H_{01}$  模, 已知  $\lambda/\lambda_c = 0.9$ ,  $f_0 = 5$  GHz。

(1) 求  $\lambda_g$  和  $\beta$ 。

(2) 若波导半径扩大一倍,  $\beta$  将如何变化?

8-14 在矩形波导中传输  $H_{10}$  模, 求填充介质(介电常数为  $\epsilon$ )时的截止波长和波导波长。在圆柱形波导中传输最低模式, 若波导填充介质(介电常数为  $\epsilon$ ),  $\lambda_c$  和  $\lambda_g$  将如何变化?

8-15 有两个矩形空腔谐振器, 工作模式都是  $H_{101}$ , 谐振波长分别为  $\lambda_0 = 3$  cm 和  $\lambda_0 = 10$  cm, 试问哪一个空腔的尺寸大? 为什么?

8-16 用一矩形波导设计一个空腔谐振器, 要求当  $\lambda_0 = 10$  cm 时对  $H_{101}$  模式谐振, 当  $\lambda_0 = 5$  cm 时对  $H_{103}$  模式谐振, 求此空腔谐振器的尺寸。

8-17 用 BJ-58 铜制标准波导制成矩形空腔谐振器波长计, 工作模式为  $H_{101}$ , 调谐范围为 4.64~7.05 GHz, 求此空腔谐振器调谐长度及固有品质因数的变化范围。

8-18 有一半径为 5 cm、长度为 10 cm 的圆柱形空腔谐振器, 试求其最低振荡模式的谐振频率和  $Q$  值。

## 附录一 重要的矢量公式

### 1. 矢量恒等式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A1.1})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{A1.2})$$

$$\nabla(\varphi \Psi) = \varphi \nabla \Psi + \Psi \nabla \varphi \quad (\text{A1.3})$$

$$\nabla \cdot (\Psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + \Psi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A1.4})$$

$$\nabla \times (\Psi \mathbf{A}) = \nabla \Psi \times \mathbf{A} + \Psi \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A1.5})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A1.6})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A1.7})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (\text{A1.8})$$

$$\nabla \cdot \nabla \Psi = \nabla^2 \Psi \quad (\text{A1.9})$$

$$\nabla \times \nabla \Psi = \mathbf{0} \quad (\text{A1.10})$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (\text{A1.11})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A1.12})$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A1.13})$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A1.14})$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbf{A} d\tau = \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS \quad (\text{A1.15})$$

$$\int_{\tau} \nabla \Psi d\tau = \oint_S \Psi \mathbf{n} dS \quad (\text{A1.16})$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \Psi dS = \oint_C \Psi d\mathbf{l} \quad (\text{A1.17})$$

### 2. 三种坐标系内梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算

#### 1) 直角坐标

$$\nabla \Psi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{A1.18})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A1.19})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{A1.19})$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{A1.20})$$

## 2) 圆柱坐标

$$\nabla \Psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{A1.21})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A1.22})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_r}{r} & \mathbf{e}_\varphi & \frac{\mathbf{e}_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{A1.23})$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{A1.24})$$

## 3) 球坐标

$$\nabla \Psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{A1.25})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{A1.26})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2 \sin \theta} & \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} & \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (\text{A1.27})$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A1.28})$$

## 3. 格林定理

## 1) 格林第一定理

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \Psi) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS$$

式中  $S$  是包围体积  $V$  的封闭曲面,  $d\mathbf{S}$  的方向是封闭曲面外法线方向。此式对于在体积  $V$  内具有连续二阶偏导数的标量函数  $\varphi$  和  $\Psi$  都成立。

## 2) 格林第二定理

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \Psi - \Psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

式中  $S$ 、 $d\mathbf{S}$  以及  $\varphi$ 、 $\Psi$  的含义和条件与格林第一定理相同。

## 附录二 常用数学公式

### 1. 三角函数

#### 和差

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$$

$$(\cos \alpha \pm j \sin \alpha)^n = \cos n\alpha \pm j \sin n\alpha$$

#### 和差化积

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \sin \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

#### 积化和差

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

#### 倍角

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha + \dots$$

## 半角

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

## 级数

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

$$\tan \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})} = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \frac{17\alpha^7}{315} + \frac{62\alpha^9}{2835} + \dots$$

## 反三角函数

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

## 2. 双曲函数

## 和差

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

$$\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta \mp \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

$$\operatorname{th}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{th} \alpha \pm \operatorname{th} \beta}{1 \mp \operatorname{th} \alpha \operatorname{th} \beta}$$

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm j\beta) = \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \pm j \operatorname{ch} \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{ch}(\alpha \pm j\beta) = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \pm j \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{th}(\alpha \pm j\beta) = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha \pm j \sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta}$$

$$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{th}^2 \alpha + \operatorname{sech}^2 \alpha = 1$$

$$(\operatorname{ch} \alpha \pm \operatorname{sh} \alpha)^n = \operatorname{ch} n\alpha \pm \operatorname{sh} n\alpha$$

## 倍角

$$\operatorname{sh} 2\alpha = 2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha$$

$$\operatorname{ch} 2\alpha = \operatorname{ch}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \alpha = 2 \operatorname{ch}^2 \alpha - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 \alpha$$

$$\operatorname{th} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{th} \alpha}{1 + \operatorname{th}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sh} 3\alpha = 4 \operatorname{sh}^3 \alpha + 3 \operatorname{sh} \alpha, \quad \operatorname{ch} 3\alpha = 4 \operatorname{ch}^3 \alpha - 3 \operatorname{ch} \alpha$$

## 半角

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{2}} \quad \left( \begin{array}{l} \alpha > 0 \text{ 取} + \\ \alpha < 0 \text{ 取} - \end{array} \right), \quad \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{2}}$$

$$\operatorname{th} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + 1} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{\operatorname{sh} \alpha}$$

## 用三角函数表示

$$\operatorname{sh} j\alpha = j \sin \alpha, \quad \operatorname{ch} j\alpha = \cos \alpha$$

$$\operatorname{th} j\alpha = j \tan \alpha$$

$$\sin j\alpha = j \operatorname{sh} \alpha, \quad \cos j\alpha = \operatorname{ch} \alpha$$

$$\tan j\alpha = j \operatorname{th} \alpha$$

## 级数

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = 1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{th} \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} - \frac{17\alpha^7}{315} + \frac{62\alpha^9}{2835} + \dots$$

$$e^{\pm \alpha} = \operatorname{ch} \alpha \pm \operatorname{sh} \alpha = 1 \pm \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} \pm \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} \pm \frac{\alpha^5}{5!} + \dots$$

## 反双曲函数

$$\operatorname{arcch} x = \operatorname{arcsh} jx - j \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arcsh} jx = j \operatorname{arcsin} x$$

$$\operatorname{arcsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arcch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (|x| \geq 1)$$

$$\operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

## 3. 对数

$$\lg x = \log_{10} x = (\log_e x) \log_{10} e = 0.434\,294 \lg x$$

$$\ln x = \log_e x = (\log_{10} x) \log_e 10 = 2.302\,585 \lg x$$

$$\operatorname{dB}(\text{分贝}) = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} = 20 \lg \frac{E_2}{E_1}, \quad x(\operatorname{dB}) = 0.115x(\operatorname{Np})$$

$$\operatorname{Np}(\text{奈比}) = 10 \ln \frac{E_2}{E_1}, \quad y(\operatorname{Np}) = 8.686y(\operatorname{dB})$$

## 4. 级数

## 等差级数

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-1)d] = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

## 等比级数

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

## 幂级数

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \\ + (\pm 1)^i \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{i!}x^i + \dots \quad (x \leq 1)$$

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots \quad (|x| < 1)$$

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots \quad (|x| \leq 1)$$

$$(1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \dots \quad (|x| < 1)$$

## 泰勒级数

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\tau-z_0|=\rho} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \quad (\rho < R)$$

## 罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\tau-z_0|=\rho} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \quad (r < \rho < R)$$



## 附录三 量 和 单 位

## 1. 国际单位制(SI)的基本单位

量的名称	单位名称	单位符号
长度	米(metre)	m
质量	千克(kilogram)	kg
时间	秒(second)	s
电流	安[培](ampere)	A
热力学温度	开[尔文]	K
物质的量	摩[尔]	mol
发光强度	坎[德位]	cd

## 2. 量的符号和单位

量的名称	量的符号	单位名称	单位符号
力	$F$	牛[顿](newton)	N
力矩	$T$	牛[顿]米(newton metre)	N · m
方向性系数	$D$	(无量纲)	—
功, 能[量]	$W$	焦[耳](joule)	J
功率	$P$	瓦[特](watt)	W
电动势	$\mathcal{E}$	伏[特](volt)	V
电压	$U$	伏[特](volt)	V
电位	$\varphi$	伏[特](volt)	V
电通[量]密度, 电位移	$D$	库(仑)每平方米 (coulomb per square metre)	C/m <sup>2</sup>
电感	$L$	亨[利](henry)	H
电导	$G$	西[门子](siemens)	S
电导率	$\sigma$	西[门子]/米(siemens per metre)	S/m
电纳	$B$	西[门子](siemens)	S

续表

量的名称	量的符号	单位名称	单位符号
电 阻	$R$	欧[姆](ohm)	$\Omega$
电 抗	$X$	欧[姆](ohm)	$\Omega$
电场强度	$E$	伏[特]每米(volt per metre)	V/m
磁通(量)	$\Phi$	韦[伯](weber)	Wb
磁场强度	$H$	安[培]每米(ampere per metre)	A/m
磁感应强度 磁通[量]密度	$B$	特[斯拉](tesla)	T
磁偶极矩	$p_m$	安[培]二次方米 (ampere metre squared)	$A \cdot m^2$
频 率	$f$	赫[兹](hertz)	Hz

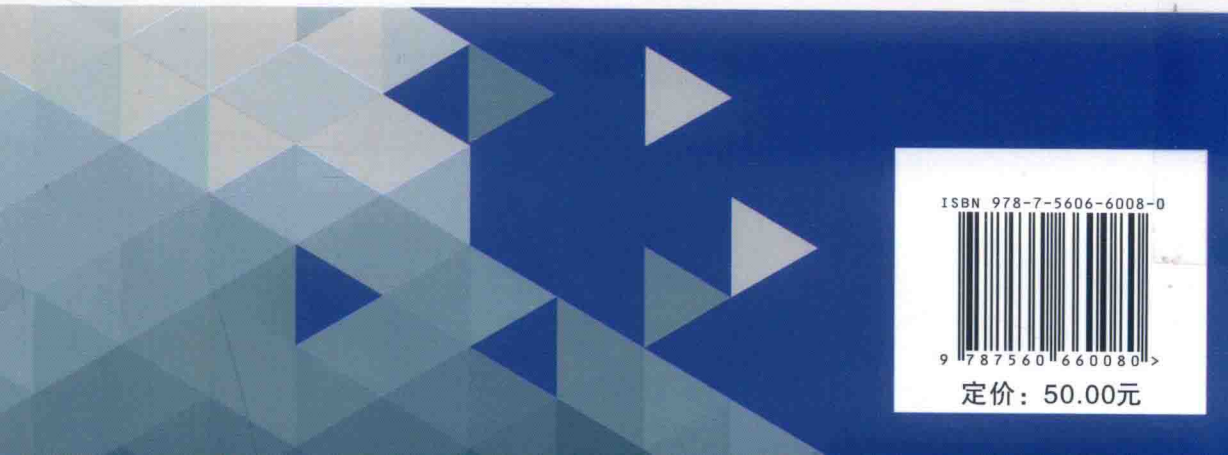


XDUP 631000

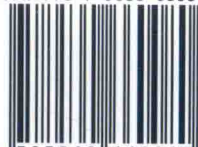
封面设计：佳易传播

# 电磁场与电磁波

(第五版)



ISBN 978-7-5606-6008-0



9 787560 660080 >

定价：50.00元

[General Information]

书名=电磁场与电磁波（第5版）

页数=304

SS号=14985691