

---

# CHAPTER 1

---

## 2011-2012 学年微积分（一）（上）期中考试

### 1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. 计算极限  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2011^n}{n!}$ .

2. 设  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小量  $u = \sqrt[4]{1 - a \arctan x^2} - 1$  与  $v = \ln \cos x$  等价, 求常数  $a$  的值.

3. 计算极限  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ .

4. 计算极限  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

5. 设曲线  $y = f(x)$  与  $y = \arctan 2x$  在原点相切, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

6. 设函数  $\varphi(x)$  在  $x = 1$  处连续, 且任给自然数  $n$ , 有  $\varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sqrt[n]{n}$ .

(1) 求  $\varphi(1)$ ;

(2) 设  $f(x) = (x-1)\varphi(x)$ , 求  $f'(1)$ .

7. 设  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ , 求  $dy(1)$ .

8. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $x^2 - xy + y^2 = 1$  确定, 求  $y'$ ,  $y''$ .

9. 设  $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}$ .

10. 设  $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+5x+2}$ , 求  $f^{(n)}(x) (n > 1)$ .

11. 确定自然数  $n$  的范围, 使  $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  的导函数  $f'(x)$  在  $x = 0$  处连续.

12. 设函数  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1}$ , 指出其间断点, 并说明间断点的类型.

## 2 综合题 (每小题 6 分, 共 24 分)

13. 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内可微, 且  $f(0) \cdot f(2) > 0$ ,  $f(0) \cdot f(1) < 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使  $f'(\xi) = f(\xi)$ .

14. 设函数  $y = f(x)$  和它的反函数  $x = \varphi(y)$  均存在三阶导数, 且  $y' \neq 0$ , 请推导出反函数的求导公式  $\frac{dx}{dy}$ ,  $\frac{d^2x}{dy^2}$ ,  $\frac{d^3x}{dy^3}$  【用  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  表示】.

15. 证明: 当  $x \geq 1$  时, 有  $\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ .

16. 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 在  $(a, +\infty)$  内可导, 且  $f'(x) > 1$ . 若  $f(a) < 0$ , 证明: 方程  $f(x) = 0$  在区间  $(a, a - f(a))$  内有唯一根.

### 3 证明题 (每小题 8 分, 共 16 分)

17. 分别叙述数列  $x_n$  有界和收敛 (以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  为例) 的定义, 并证明: 收敛数列是有界数列.

18. 如果记  $\xi = \theta \cdot x$ ,  $0 < \theta < 1$ , 则 Lagrange 中值公式  $f(x) - f(0) = xf'(\xi)$  可以写作:  $f(x) - f(0) = xf'(\theta x)$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $\theta$  的大小通常与  $x$  相关.

(1) 若  $f''(0) \neq 0$ , 试证:  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ ;

(2) 设  $f(x) = \arctan x$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ .

---

## CHAPTER 2

---

### 2011-2012 学年微积分 (一) (上) 期中考试参考答案

#### 1 基本计算题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 当  $n > 2011$  时,  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2011^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2011^{n-1}} = \frac{2011}{n} < 1$ ,

数列  $\{a_n\}$  从第 2012 项开始单调递减, 且  $a_n > 0$ , 所以数列  $\{a_n\}$  收敛.

对  $a_n = \frac{2011}{n} a_{n-1}$  两边取极限, 得  $l = 0$ .

2. **Solution.** 由题意可知

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 - a \arctan x^2} - 1}{\ln \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4} a \arctan x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a}{4} x^2}{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

故  $a = 2$ .

3. **Solution.** 由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi$  介于  $x$  和  $\sin x$  之间, 使得  $e^x - e^{\sin x} = e^\xi(x - \sin x)$ .

易知当  $x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow 0$ , 所以

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} e^\xi \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= \exp \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}{x} \right] = \exp \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} \right] \\ &= \exp \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right] = \exp \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

5. **Solution.** 由题意可知

$$f(0) = y(0) = 0, \quad f'(0) = y'(0) = \left. \frac{2}{1+4x^2} \right|_{x=0} = 2,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = f'(0) = 2.$$

6. **Solution.** (1) 因  $\varphi(x)$  在  $x=1$  处连续, 所以

$$\varphi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(2) 由导数的定义可得,

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\varphi(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \varphi(1) = 1.$$

7. **Solution.** 因为  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ , 所以  $dy(1) = y'(1) dx = \frac{3\sqrt{2}}{8} dx$ .

8. **Solution.** 方程两边对  $x$  求导, 得  $2x - y - x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$ , 所以  $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$ .

$$y'' = \frac{(2-y')(x-2y) - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2} = \frac{6}{(x-2y)^3}.$$

9. **Solution.** 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t + t \sin t - \cos t}{\frac{-\sin t}{\cos t}} = -t \cos t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = (-t \cos t)' \cdot \frac{1}{\frac{-\sin t}{\cos t}} = \frac{\cos t - t \sin t}{\tan t},$$

所以

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

10. **Solution.** 因为  $f(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x+2} \right)$ , 所以

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[ \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \right].$$

11. **Solution.** 欲使  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}$  存在, 必须  $n-1 > 0$ , 此时  $f'(0) = 0$ .

欲使导函数  $f'(x)$  在  $x=0$  处连续, 应有  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$ .

当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}$ , 所以必须  $n-2 > 0$ .

综上所述, 自然数  $n$  的范围是  $n > 2$ .

12. **Solution.**  $f(x)$  的间断点为  $x = 0$  和  $x = 1$ .

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{x+1}{x-1}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

且  $f(0)$  无定义, 所以  $x = 0$  是  $f(x)$  的可去间断点;

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1} = -\frac{\pi}{2e}, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x+1}{x-1} = \frac{\pi}{2e}, \end{aligned}$$

所以  $x = 1$  是  $f(x)$  的跳跃间断点.

## 2 综合题 (每小题 6 分, 共 24 分)

13. **Solution.** 由连续函数的介值定理, 存在  $\eta_1 \in (0, 1), \eta_2 \in (1, 2)$  使得  $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$ .

设  $g(x) = e^{-x} f(x)$ , 则  $g(x)$  在  $[\eta_1, \eta_2]$  内可导, 且  $g(\eta_1) = g(\eta_2) = 0$ .

由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 2)$  使得  $g'(\xi) = e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)) = 0$ , 所以  $f'(\xi) = f(\xi)$ .

14. **Solution.**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{y'} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left( -\frac{y''}{(y')^3} \right) = \frac{d}{dx} \left( -\frac{y''}{(y')^3} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y'''(y')^3 - 3(y')^2(y'')^2}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y'y''' - 3(y'')^2}{(y')^5}.$$

15. **Solution.** 令  $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} (x \geq 1)$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \equiv 0,$$

所以  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上恒为常数. 又  $f(1) = \arctan 1 - \frac{1}{2} \arccos 1 = \frac{\pi}{4}$ , 所以当  $x \geq 1$  时,

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

16. **Solution.** 记  $b = a - f(a) > a$ , 则由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) > f(a) + (b-a) = 0.$$

又由连续函数的介值定理, 存在  $\eta \in (a, b)$  使得  $f(\eta) = 0$ .

因为  $f(x)$  是严格单调递增的, 所以  $\eta$  是方程  $f(x) = 0$  在区间  $(a, a - f(a))$  内的唯一根.

### 3 证明题 (每小题 8 分, 共 16 分)

17. 数列  $x_n$  有界的定义:  $\exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}$ , 恒有  $|x_n| \leq M$ .

数列  $x_n$  收敛于  $a$  的定义:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$ , 恒有  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

**Proof.** 取  $\varepsilon = 1$ , 则存在自然数  $N$  使得当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n - a| < 1$ , 从而

$$|x_n| = |x_n - a + a| < 1 + |a|.$$

设  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$ , 则  $\forall n \in \mathbf{N}$ , 恒有  $|x_n| \leq M$ . 所以数列  $x_n$  有界.

18. **Proof.** (1) 计算

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta x) - f'(0)}{\theta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)}{\theta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{\theta x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2\theta x} = \frac{1}{2} f''(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

由  $f''(0) \neq 0$ , 得  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ .

(2) 由题设可以写出  $\arctan x - 0 = \frac{x}{1 + \xi^2} = \frac{x}{1 + (\theta x)^2}$ , 所以

$$\theta^2 = \frac{\frac{x}{\arctan x} - 1}{x^2} = \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x}.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

即  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .