CHAPTER 1

2014-2015 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 计算数列极限 $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + n^2 + 2^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

2. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{\ln(1 + x^3)}$.

3. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

4. 已知 $y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$，其中 $f'(x)=\arcsin x^2$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t), \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 计算曲线 $x^2-xy+2y^2=2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

7. 设 $x=g(y)$ 是函数 $y=\ln x+\arctan x$ 的反函数，求 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

8. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，计算下列函数的导数 y' 以及 y''：

（1）$y=f(x^2)$；

（2）$y=(f(x))^2$.

9. 设函数 $y=\dfrac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5\mathrm{e}^x}$，使用对数求导法求 $y'|_{x=1}$.

10. 求无穷小量 $u(x)=\cos 2x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x^2}}(x\to 0)$ 的主部.

2 综合题 (每小题 7 分，共 28 分)

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geq 0,\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\end{cases}$，问 $a(a\geq 0)$ 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点，并指出该间断点的类型.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导.$f'(0)=0, f''(0)=2$. 求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}$.

13. 设 $f'(x)$ 处处连续，$g(x)=f(x)\sin^2 x$，求 $g''(0)$.

14. 一个 13 英尺长的梯子斜靠在墙边上，当梯子的顶端沿着墙面向墙底滑落时，梯子底端沿地面移动的速度是 5 英尺/秒，问当梯子底端的地面长度为 12 英尺时，直角三角形的面积的变化率是多少?

3 证明题 (每小题 6 分，共 12 分)

15. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

16. 设函数 $f(x)=\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数，$\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$，已知对一切实数 x，有 $|f(x)|\le|x|$，试证：$|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n|\le 1$.

CHAPTER 2

2014-2015 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 当 n 充分大时，$2^n > 1 + n^2$，所以 $2^n < 1 + n^2 + 2^n < 2 \cdot 2^n$，因此

$$2 < \left(1 + n^2 + 2^n\right)^{\frac{1}{n}} < 2^{1+\frac{1}{n}}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1+\frac{1}{n}} = 2$，

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + n^2 + 2^n\right)^{\frac{1}{n}} = 2.$

2. **Solution**.

$$\begin{aligned} l = & \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - x^2 \cos x}{3x^2(1+x^2)} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{3x^2} \\ = & \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. **Solution**.

$$\begin{aligned} l = & \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln\tan x - \ln x}{1 - \cos x}\right) \\ = & \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{x}}{\sin x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin^2 x}\right) \\ = & \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}\right) \\ = & \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

4. **Solution**. 因为 $y' = f'\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{2}{(x+1)^2}$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = f'(-1) \cdot 2 = 2\arcsin 1 = \pi.$

5. **Solution**.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3t^2 + 2t}{1 - \frac{1}{1+t}} = (1+t)(3t+2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=((1+t)(3t+2))'\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}.$$

6. **Solution**. 方程 $x^2-xy+2y^2=2$ 两边求微分得

$$2x\,\mathrm{d}x-(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)+4y\,\mathrm{d}y=0,$$

将 $x=1,y=1$ 代入上式得 $\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x$，所以切线方程为 $y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$ 即 $x+3y-4=0$.

7. **Solution**. 函数 $y=\ln x+\arctan x$ 严格单调增加，当 $y=\frac{\pi}{4}$ 时，$x=1$.

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}}=\frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}$，所以 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\frac{\pi}{4}}=\frac{1\cdot 2}{3}=\frac{2}{3}$，且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}\\&=\frac{(3x^2+1)(x^2+x+1)-x(1+x^2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\cdot\frac{x(1+x^2)}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

故 $\left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4\cdot3-2\cdot3}{3^2}=\frac{4}{9}$.

8. **Solution**. （1）$y'=f'(x^2)\cdot 2x$，$y''=f''(x^2)\cdot(2x)^2+f'(x^2)\cdot 2=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$.

（2）$y'=2f(x)f'(x)$，$y''=2(f'(x))^2+2f(x)f''(x)$.

9. **Solution**. $\ln y=2\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln x-5\ln x-x$，所以

$$y'=\frac{(1+x)^2\sqrt{x}}{x^5\mathrm{e}^x}\left(\frac{2}{x+1}-\frac{9}{2x}-1\right).$$

故 $y'|_{x=1}=\frac{4}{\mathrm{e}}\left(1-\frac{9}{2}-1\right)=-\frac{18}{\mathrm{e}}$.

10. **Solution**.

$$\begin{aligned}u(x)=&\cos x-\mathrm{e}^{-2x^2}\\=&\left(1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4+o(x^4)\right)-\left(1-2x^2+\frac{(2x^2)^2}{2}+o(x^4)\right)\\=&-\frac{4}{3}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

所以无穷小量 $u(x)$ 的主部为 $-\frac{4}{3}x^4$.

2 综合题 (每小题 7 分，共 28 分)

11. **Solution**. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}$.

若 $a=0$，则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=+\infty$，此时 $x=0$ 为无穷间断点.

若 $a \neq 0$，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

若 $a \neq 1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \neq \dfrac{1}{2}$，此时 $x=0$ 为跳跃间断点.

12. **Solution**. 由于 $f''(0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内可导.

由 Lagrange 中值定理，存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 x 之间，使得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(\tan x)-f(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(\xi)(\tan x - x)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi - 0}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{\tan x - x}{x^3}.
\end{aligned}$$

当 $x \to 0$ 时，$\tan x \to 0$，所以由夹逼准则可知 $\xi \to 0$.

同时，$\dfrac{\xi}{x}$ 介于 1 与 $\dfrac{\tan x}{x}$ 之间，显然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x} = 1$. 故

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi - 0}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{\tan x - x}{x^3} &= f''(0)\cdot\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

13. **Solution**. $g'(x) = f'(x)\sin^2 x + f(x)\cdot 2\sin x\cos x$，所以 $g'(0)=0$.

$$\begin{aligned}
g''(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)-g'(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)\sin^2 x + f(x)\cdot 2\sin x\cos x}{x} \\
&= f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} + \lim_{x\to 0} 2f(x)\cos x\cdot\frac{\sin x}{x} \\
&= 2f(0).
\end{aligned}$$

14. **Solution**. 设 t 时刻梯子底端的地面长度为 $x(t)$ 英尺，梯子顶端距地面的距离为 $y(t)$ 英尺，

直角三角形的面积为 $S(t)$ 平方英尺. 则 $x^2+y^2=13^2$，$S = \dfrac{1}{2}xy$.

方程 $x^2+y^2=13^2$ 两边对 t 求导得 $x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$，

此时刻 $x=12$，所以 $y=5$，又 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5$，代入得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{12}{5}\cdot 5 = -12$.

故

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}(12\cdot(-12)+5\cdot 5) = -\frac{119}{2}.$$

即直角三角形的面积的变化率为 $-\dfrac{119}{2}$ 平方英尺/秒.

3 证明题 (每小题 6 分，共 12 分)

15. **Proof**. 令 $F(x)=f(x)g(x)-f(x)g(b)-f(a)g(x)$，则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

    且 $F(a)=F(b)=-f(a)g(b)$. 由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，

    即 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(b)-f(a)g'(\xi)=0$，化简得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.

16. **Proof**. $f(0)=\alpha_1\varphi(0)+\alpha_2\varphi(0)+\cdots+\alpha_n\varphi(0)=0$.

$$
\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\alpha_1\frac{\varphi(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\alpha_2\frac{\varphi(2x)}{2x}\cdot 2+\cdots+\lim_{x\to 0}\alpha_n\frac{\varphi(nx)}{nx}\cdot n\\
&=\varphi'(0)\left(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n\right)=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n.
\end{aligned}
$$

因为 $\forall x$，$|f(x)|\le|x|$，所以 $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le 1$，令 $x\to 0$，得 $|f'(0)|=|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n|\le 1$.