CHAPTER 1

2016-2017 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 设数列 x_n 满足 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n+10}{3n-2}(n > 1)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$（$a, b, c > 0$ 是常数）.

3. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x) + x^2\sin\frac{1}{x}}{(\cos x + 1)\ln(1+x)}$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+2x+1}{x-1}=b$，求常数 a,b 的值.

5. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

6. 指出函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x^2-3x+2)}{x(x-1)|x-2|}$ 的间断点，并判断间断点的类型.

7. 设函数 $y=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}(x>-1)$，求微分 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

8. 设函数 $v=f(u)$ 有反函数 $u=\varphi(v)$，满足 $f(0)=0$，且 $\varphi(v)$ 是可导的，在 $v=0$ 的某个邻域内有 $\varphi'(v)=\dfrac{1}{2+\sin v}$，求复合函数 $y=f(2x+x^2)$ 在 $x=0$ 处的导数.

9. 设 $y=\ln(2x^2-3x+1)$，求 $y^{(10)}(0)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 确定，求在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$F(x)=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)f(x)$，计算导数 $F'(a)$.

12. 求函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导，且 $f(1+x)-3f(1-x)\sim 3x^2(x\to 0)$，求 $f(1),f'(1),f''(1)$ 的值.

14. 求无穷小量 $u(x) = \arcsin x - \arctan x (x \to 0)$ 的主部和阶数.

15. 一根长为 5 米的竹竿斜靠着墙，地面与墙面垂直，竹竿在地面的投影也与墙面垂直. 设墙面和地面是光滑的，使得竹竿顶端 A 沿着墙壁竖直往下滑动，同时，底端 B 沿着其投影线向外滑动. 如果在底端 B 距离墙根为 3 米时，点 B 的速度为 4 米/秒，问此时顶端 A 下滑的速度为多少?

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 由函数在一点可导可否推出它在该点的某个邻域内连续？认为可以请证明，认为不行请举反例.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 设正实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. 证明：存在三个不相等的实数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$，使得 $\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \dfrac{\lambda_3}{f'(\xi_3)} = 1$.

CHAPTER 2

2016-2017 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**.

法一. 当 $n>22$ 时，$\dfrac{n+10}{3n-2}<\dfrac{1}{2}$，所以 $0<x_{n+1}<\dfrac{1}{2}x_n<\cdots<\dfrac{1}{2^{n-22}}x_{22}$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-22}}x_{22}=0$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

法二. 当 $n>6$ 时，$\dfrac{n+10}{3n-2}<1$，所以 $0<x_{n+1}<x_n<\cdots<x_6$，由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+10}{3n-2}=\frac{1}{3}a,$$

解得 $a=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

2. **Solution**.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right]}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\left[\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{x}\right]}\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}\\&=\sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

3. **Solution**.

$$\begin{aligned}l&=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)+x^2\sin\frac{1}{x}}{(\cos x+1)\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)+x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

4. **Solution**. 原极限式可变形为

$$0=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3+(2-b)x+1+b}{x-1},$$

得 $a=0,2-b=0$，即 $a=0,b=2$.

5. **Solution**. 当 $x \to 0^-$ 时，$2^{\frac{1}{x}} \to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

当 $x \to 0^+$ 时，$2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$，所以

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

因此 $l = 1$.

6. **Solution**. 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, 1, 2$.

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$，所以 $x = 0$ 为无穷间断点.

当 $x = 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin[(x-1)(x-2)]}{x(x-1)|x-2|} = -1$，所以 $x = 1$ 为可去间断点.

当 $x = 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-1)(x-2)}{-x(x-1)(x-2)} = -\dfrac{1}{2}$，

所以 $x = 2$ 为跳跃间断点.

7. **Solution**. $\ln y = \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}\right) + \ln\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\right] = \dfrac{1}{2}\left[x - \ln(x+1) + \dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x+1)\right]$，

所以

$$\begin{aligned} y' &= y \cdot \frac{1}{2}\left[x - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x+1)\right]' \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\left[1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right]. \end{aligned}$$

代入 $x = 0$ 得 $\mathrm{d}y|_{x=0} = y'(0)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{8}\mathrm{d}x$.

8. **Solution**.

$$\begin{aligned} y'(0) &= f'(2x+x^2)(2+2x)\big|_{x=0} \\ &= 2f'(0) \\ &= \frac{2}{\varphi'(0)} = 4. \end{aligned}$$

9. **Solution**. $y = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$，所以

$$y^{(10)} = \frac{(-1)^9\, 9!}{(x-1)^{10}} + \frac{(-1)^9\, 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}.$$

代入 $x = 0$ 得 $y^{(10)}(0) = -9! \cdot (2^{10}+1)$.

10. **Solution**. 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t} = -\tan t,$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$，且

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (-\tan t)' \cdot \frac{1}{-3\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3\cos^4 t\sin t},$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**.
$$
\begin{aligned}
F'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a)f(x)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^a(\mathrm{e}^{x-a}-1)f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\mathrm{e}^a f(x)\frac{\mathrm{e}^{x-a}-1}{x-a}\\
&= \mathrm{e}^a f(a).
\end{aligned}
$$

12. **Solution**. 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=0$，

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)$ 显然连续. 又

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 综上所述，$f'(x)$ 在 **R** 上处处连续.

13. **Solution**. 由题意可知 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+x)-3f(1-x)]=-2f(1)=0$，所以 $f(1)=0$.

且
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-3f(1-x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}-3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}\\
&= 4f'(1)=0,
\end{aligned}
$$

所以 $f'(1)=0$.

又
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-3f(1-x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(1+x)-3f'(1-x)}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f'(1+x)-f'(1)}{2x}-3\lim_{x\to 0}\frac{f'(1-x)-f'(1)}{-2x}\\
&= -f''(1)=3,
\end{aligned}
$$

所以 $f''(1)=-3$.

14. **Solution**. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{cx^r}=1$，则

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{cx^r}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x^2+(1-\sqrt{1-x^2})}{crx^{r-1}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac12 x^2}{crx^{r-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac32 x^2}{crx^{r-1}},
\end{aligned}
$$

因此必须 $\begin{cases}r-1=2,\\ cr=\dfrac32,\end{cases}$，解得 $r=3,c=\dfrac12$.

所以 $u(x)$ 的主部为 $\dfrac{1}{2}x^3$，阶数为 3.

15. **Solution**. 设 t 时刻竹竿底端距离墙根的水平距离 $x(t)$，竹竿顶端距离墙根的垂直距离为 $y(t)$，则

$$x^2(t)+y^2(t)=25.$$

方程两边对 t 求导得

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$$

将 $x(t)=3\mathrm{m}$，$y(t)=4\mathrm{m}$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4\mathrm{m/s}$

代入上式得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-3\mathrm{m/s}$，即竹竿顶端下滑的速度为 3m/s.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**. 不能. 反例：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$

计算 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

考虑非零点 a. 若 $a\in\mathbf{Q}$，取点列 $\{x_n, x_n\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0\neq f(a)=a^2$，说明 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

同理可证当 $a\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ 时，$f(x)$ 也不连续. 所以函数除零点外处处不连续.

于是，函数在 $x=0$ 处可导，但在该点的任何邻域内不连续.

17. **Proof**. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0<\lambda_1<1=f(1)$，

由介值定理，存在 $c_1\in(0,1)$ 使得 $f(c_1)=\lambda_1$.

又因为 $f(c_1)=\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1=f(1)$，

在区间 $[c_1,1]$ 上应用介值定理，存在 $c_2\in(c_1,1)$ 使得 $f(c_2)=\lambda_1+\lambda_2$.

在区间 $[0,c_1],[c_1,c_2],[c_2,1]$ 上对函数 $f(x)$ 依次使用 Lagrange 中值定理，

存在 $\xi_1\in(0,c_1),\xi_2\in(c_1,c_2),\xi_3\in(c_2,1)$，使得

$$\begin{aligned}f'(\xi_1)&=\frac{f(c_1)-f(0)}{c_1-0}=\frac{\lambda_1}{c_1},\\ f'(\xi_2)&=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}=\frac{\lambda_2}{c_2-c_1},\\ f'(\xi_3)&=\frac{f(1)-f(c_2)}{1-c_2}=\frac{\lambda_3}{1-c_2}.\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(\xi_3)}=c_1+(c_2-c_1)+(1-c_2)=1.$$