# CHAPTER 1

# 2016-2017 学年微积分（一）（上）期末考试

## 1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列命题正确的是（　　）.

   **A.** 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散　　**B.** 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{y_n\}$ 必收敛

   **C.** 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小　　**D.** 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \neq 0$，$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$，则 $x = 0$ 是函数 $g(x)$ 的（　　）.

   **A.** 连续点　　**B.** 跳跃间断点　　**C.** 无穷间断点　　**D.** 可去间断点

3. 当 $x \to 1$ 时，无穷小量 $\ln x^2$ 的无穷小主部为（　　）.

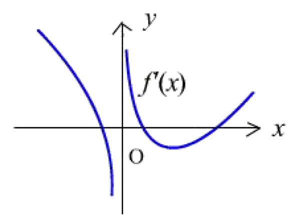
   **A.** $x$　　**B.** $x^2 - 1$　　**C.** $2(1-x)$　　**D.** $2(x-1)$

4. 若函数 $f(x)$ 在原点处连续，$F(x) = f(x)|\sin x|$，则 $f(0) = 0$ 是 $F'(0)$ 存在的（　　）.

   **A.** 充要条件　　**B.** 充分但非必要条件

   **C.** 必要但非充分条件　　**D.** 既非充分也非必要条件

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导函数图形如右图所示，则 $f(x)$ 的极值点的个数为（　　）.




   **A.** 1　　**B.** 2

   **C.** 3　　**D.** 4

6. 若函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arctan\dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$，则直线（　　）**不是**此函数的渐近线.

   **A.** $x = 0$　　**B.** $y = 1 - \dfrac{\pi}{4}$

   **C.** $x = 2$　　**D.** $y = 1 + \dfrac{\pi}{4}$

## 2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{\sin x^3} = $ ____________.

8. $\int_0^1 x(1-x)^{99}\,\mathrm{d}x = $ ____________________.

9. 设点 $(1,4)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点，则 $a = $ ____________，$b = $ ____________.

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x^3}{1+\sin^4 x} + \sin^4 x\cos x\right)\mathrm{d}x = $ ____________________.

## 3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2x+y} - \cos(xy) = \mathrm{e} - 1$ 所确定的隐函数，求导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

12. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 确定，求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

13. 求定积分 $I = \int_0^{\pi} \sin^5 x\sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

14. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

15. 求微分方程 $y'-\mathrm{e}^{x-y}=1$ 的通解.

16. 求反常积分 $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x^2}\mathrm{d}x$.

# 4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设曲线段 $y=ax^2(a>0,0\le x\le 1)$ 与 $x$ 轴及直线 $x=1$ 围成一个曲边三角形 $A$，图形 $A$ 绕 $x$ 轴旋转一周得到的旋转体的体积记为 $V_1$，图形 $A$ 绕直线 $x=1$ 旋转一周得到的旋转体的体积记为 $V_2$，求 $a$ 取何值时体积差 $V_2-V_1$ 最大?

18. 应用微分学知识讨论方程 $x\ln x + a = 0$ 的根问题:

（1）$a$ 取何值时，该方程有一个实根?

（2）$a$ 取何值时，该方程有两个实根?

## 5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$（$a>0$）上有二阶连续导数，并且在区间内部取得最小值 $-1$，$f(a)=f(b)=1$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{16}{(b-a)^2}$.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上单调递减的连续函数，则有 $\displaystyle\int_a^b (x-a)^3 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^3}{4}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

# CHAPTER 2

# 2016-2017 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

## 1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.

   对于 A 选项，考虑 $x_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1 \end{cases}$，$y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ n, & n = 2k-1 \end{cases}$，其中 $k \in \mathbf{N}^+$，

   则 $x_n y_n \equiv 0$，但 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均发散.

   对于 B，C 选项，考虑 $x_n = 0$，$y_n = n$，则 $x_n y_n \equiv 0$，$\{x_n\}$ 收敛、有界，但 $\{y_n\}$ 发散.

   对于 D 选项，即存在 $M > 0$ 使得 $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| \leq M$ 对任意的 $n$ 成立，

   所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_n y_n|}{|x_n|} \leq \lim\limits_{n\to\infty} M|x_n y_n| = 0$，故 $\{y_n\}$ 为无穷小.

2. **Solution**. A.

   由题意可知 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = a = g(0)$，

   所以函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

3. **Solution**. D.

   设 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{c(x-1)^k} = 1$，则

   $$\begin{aligned} 1 = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{c(x-1)^k} &= \lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{c(x-1)^k} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2}{ck(x-1)^{k-1}x} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{ck(x-1)^{k-1}}. \end{aligned}$$

   所以 $k = 1$，$c = 2$，无穷小主部为 $2(x-1)$.

4. **Solution**. A.

   若 $f(0) = 0$，因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

   又 $F(0) = 0$，则

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)|\sin x|}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \frac{|\sin x|}{x}. \end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，且 $\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $x\to0$ 时是有界变量，无穷小量乘有界变量仍为无穷小量，故 $F'(0)=0$，即 $F'(0)$ 存在.

若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ 存在，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}$ 存在.

分别考察左右极限：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0^+}f(x)\frac{\sin x}{x}=f(0)\cdot1=f(0),$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0^-}f(x)\frac{-\sin x}{x}=f(0)\cdot(-1)=-f(0).$$

因为极限存在，左右极限必须相等，所以 $f(0)=-f(0)$，解得 $f(0)=0$.

因此 $f(0)=0$ 是 $F'(0)$ 存在的充要条件.

5. **Solution**. D.

   由图可知 $f'(x)$ 在 $x<0$ 时有一次变号，在 $x>0$ 时有两次变号，并且 $f'(0^-)<0$，$f'(0^+)>0$，所以 $x=0$ 也是 $f(x)$ 的极值点. 故 $f(x)$ 的极值点的个数为 4.

6. **Solution**. C.

   因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的竖直渐近线. 又

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2^{\frac{1}{x}}+\arctan\frac{x|x|}{(x-1)(x-2)}\right]=1+\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{-x^2}{(x-1)(x-2)}=1-\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2^{\frac{1}{x}}+\arctan\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right]=1+\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}=1+\frac{\pi}{4}.$$

   所以 $y=1-\dfrac{\pi}{4}$ 与 $y=1+\dfrac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 的水平渐近线.

## 2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{\sin x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

8. **Solution**. $\dfrac{1}{10100}$.

   令 $1-x=u$，则

$$\int_0^1x(1-x)^{99}\,\mathrm{d}x=\int_1^0(1-u)u^{99}(-\mathrm{d}u)=\int_0^1(u^{99}-u^{100})\,\mathrm{d}u=\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{1}{10100}.$$

9. **Solution**. $a=-2$，$b=6$.

   因为 $y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$，

   所以 $y''(1)=6a+2b=0$，$y(1)=a+b=4$，解得 $a=-2$，$b=6$.

10. **Solution**. $\dfrac{2}{5}$.

由于 $y=\dfrac{x^3}{1+\sin^4 x}$ 是奇函数，所以 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^3}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x=0$.

故

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x^3}{1+\sin^4 x}+\sin^4 x\cos x\right)\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}\sin x\\&=\frac{2}{5}\sin^5 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

## 3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 两边对 $x$ 求导，得

$$\mathrm{e}^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0.$$

将 $x=0$，$y=f(0)=1$ 代入上式，得 $\mathrm{e}(2+y'|_{x=0})=0$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=-2$.

12. **Solution**.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3(1+t)}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{3(1+t)}{2}\right)'\cdot\frac{1}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)}.$$

13. **Solution**.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\sin^5 x|\cos x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5 x(-\cos x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5 x\mathrm{d}\sin x\\&=\frac{1}{6}\sin^6 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{6}\sin^6 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

14. **Solution**.

$$\begin{aligned}l&=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\\&=\exp\left[\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\right]=\exp\left[x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\right]\\&=\exp\left[\ln 2-1+\ln(1+x)\Big|_0^1\right]=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

15. **Solution**.

**法一**. 令 $u=y-x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1$，原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-u}$，即 $\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，

两边积分得 $\mathrm{e}^u = x + C$，所以原方程的通解为 $\mathrm{e}^{y-x} = x + C$.

**法二**. 方程两边同乘 $\mathrm{e}^y$，得 $\mathrm{e}^y y' - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$，即 $(\mathrm{e}^y)' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$.

这是一个关于 $\mathrm{e}^y$ 的一阶非齐次线性微分方程，由通解公式得

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}x}\left(C + \int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{e}^x\left(C + \int \mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^x(x + C). \end{aligned}$$

16. **Solution**. 令 $u = \sqrt{x} + 1$，则 $x = (u-1)^2$，$\mathrm{d}x = 2(u-1)\,\mathrm{d}u$，

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)^4} \cdot 2(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)^3}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_2^{+\infty} \ln u \mathrm{d}\frac{1}{(u-1)^2} = -\left.\frac{\ln u}{(u-1)^2}\right|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u(u-1)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln 2 + \int_2^{+\infty}\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right]\mathrm{d}u \\ &= \ln 2 + \left[\ln\frac{u}{u-1} - \frac{1}{u-1}\right]_2^{+\infty} = \ln 2 - \ln 2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

## 4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 因为

$$V_1 = \int_0^1 \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi a^2 \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{5},$$

$$V_2 = \int_0^a \pi(1-x)^2 \mathrm{d}y = 2\pi a \int_0^1 (1-x)^2 x \mathrm{d}x = \frac{\pi a}{6},$$

故 $V_2 - V_1 = \dfrac{\pi a}{6} - \dfrac{\pi a^2}{5}$. 令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(V_2 - V_1) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi a}{5} = 0$，解得 $a = \dfrac{5}{12}$.

由于 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}(V_2 - V_1) = -\dfrac{2\pi}{5} < 0$，所以当 $a = \dfrac{5}{12}$ 时，体积差 $V_2 - V_1$ 最大.

18. **Solution**. 令 $f(x) = x\ln x$，则 $f'(x) = \ln x + 1$，

当 $0 < x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x) < 0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x) > 0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$，$f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(+\infty) = +\infty$.

（1）当 $-a \geq 0$ 或 $-a = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即 $a \leq 0$ 或 $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程 $x\ln x + a = 0$ 有一个实根.

（2）当 $-a \in \left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right)$，即 $a \in \left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，方程 $x\ln x + a = 0$ 有两个实根.

## 5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由题意可知，存在 $c \in (a,b)$，使得 $f'(c) = 0$ 且 $f(c) = -1$.

由 Taylor 公式，

$$f(a)-f(c)=2=f'(c)(a-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-c)^2=\frac{f''(\xi_1)}{2}(c-a)^2,$$

$$f(b)-f(c)=2=f'(c)(b-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2=\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2,$$

其中 $\xi_1,\xi_2$ 介于 $a$ 与 $b$ 之间. 上述两式即 $f''(\xi_1)=\dfrac{16}{[2(c-a)]^2}$，$f''(\xi_2)=\dfrac{16}{[2(b-c)]^2}$.

记 $M=\max\{2(c-a),2(b-c)\}$，$N=\min\{2(c-a),2(b-c)\}$，则 $N\le b-a\le M$，

所以 $\dfrac{16}{M^2}\le\dfrac{16}{(b-a)^2}\le\dfrac{16}{N^2}$.

因为 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由介值定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{16}{(b-a)^2}$.

20. **Solution**. 令 $F(t)=\displaystyle\int_a^t(x-a)^3f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{(t-a)^3}{4}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$（$a\le t\le b$），

则

$$\begin{aligned}F'(t)&=(t-a)^3f(t)-\frac{3(t-a)^2}{4}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{(t-a)^3}{4}f(t)\\&=\frac{3(t-a)^3}{4}f(t)-\frac{3(t-a)^2}{4}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{3(t-a)^2}{4}\left[(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

由积分中值定理，存在 $\xi\in(a,t)$ 使得 $\displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x=(t-a)f(\xi)$，

所以 $F'(t)=\dfrac{3(t-a)^2}{4}\left[(t-a)f(t)-\displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\dfrac{3(t-a)^3}{4}[f(t)-f(\xi)]$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，所以 $f(t)\le f(\xi)$，故 $F'(t)\le 0$，$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减.

因此 $F(b)\le F(a)=0$，即 $\displaystyle\int_a^b(x-a)^3f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^3}{4}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.