CHAPTER 1

2015-2016 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则点 P 的坐标是（　　）.

   A. $(1,-1,2)$　　**B.** $(-1,1,2)$

   C. $(1,1,2)$　　**D.** $(-1,1,1)$

2. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的以下 4 条性质：

   （1）两个偏导数存在；（2）两个偏导函数连续；（3）可微；（4）沿任意方向的方向导数存在.

   若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　）.

   A. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　**B.** $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

   C. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　**D.** $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

3. 将二次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 化为直角坐标系下的二次积分，正确的结果是（　　）.

   A. $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　**B.** $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

   C. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　**D.** $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$

4. 设 S 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 被平面 $z=0,z=h$ 截下的部分，则 $\iint\limits_S(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=($　　$)$.

   A. $-2\pi hR^3$　　**B.** $2\pi hR^3$　　**C.** πhR^3　　**D.** $\frac{\pi}{2}R^4h$

5. 下列命题中正确的是（　　）.

   A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

   B. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则 $l<1$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 绝对收敛

6. 设 $f(x)=x+1(0\le x\le\pi)$，而 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$，$-\infty<x<+\infty$，其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

则 $S\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=$（　　）.

A. $-\dfrac{\pi}{2}+1$　　**B.** $\dfrac{\pi}{2}+1$　　**C.** $-\dfrac{\pi}{2}-1$　　**D.** $\dfrac{\pi}{2}-1$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 以曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+y^2-z^2=0\end{cases}$ 为准线，母线平行于 x 轴的柱面方程是________________.

8. 设 $\boldsymbol{F}=(y,z,xy)$，$\boldsymbol{G}=(1,0,x)$，则 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=$________________.

9. 设 $D:x^2+y^2\le a^2(a>0)$，若 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi$，则 $a=$________________.

10. 设 L 为从 $A(1,0)$ 到 $B(2,1)$ 的曲线弧，则 $\int_L\left(2xy-y^4+3\right)\,\mathrm{d}x+\left(x^2-4xy^3\right)\,\mathrm{d}y=$________________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求过点 $P(1,2,3)$ 且与 z 轴相交、与平面 $x+y+z-2=0$ 平行的直线方程.

12. 设 $z=f\left(\sin x,\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 设函数 $y=y(x), z=z(x)$ 由方程 $z=xf(x+y)$ 以及 $F(x,y,z)=0$ 所确定，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

14. 求三重积分 $I=\displaystyle\iiint_V (x^2+yz+z^2)\,\mathrm{d}v$，其中 $V: x^2+y^2+z^2\le 1$.

15. 求曲线积分 $I=\displaystyle\oint_L \left(x^2-y^2\right)\,\mathrm{d}x+\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=x+y+1$，取正向.

16. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 在椭球面 $x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n}=(0,-1,1)$ 的方向导数最大.

18. 设速度场 $\boldsymbol{v}=\big(2x^3,2y^3,3(z^2-1)\big)$，$S$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧，求单位时间内流过曲面 S 上侧的通量

$$\varPhi=\iint\limits_{S}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

5　综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 证明 Leibniz 判别法：若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n(a_n>0)$ 满足（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；（2）$\{a_n\}$ 单调减少，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

20. 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0,\iint\limits_{D}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=a$，其中 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$。计算积分

$$I=\iint\limits_{D}xyf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

CHAPTER 2

2015-2016 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. C.

   曲面可写成 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z-4=0$，其法向量为

   $$\nabla F=(2x,2y,1).$$

   切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，故两平面的法向量平行，即

   $$\frac{2x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{1}{1},$$

   解得 $x=1,y=1$. 代入曲面方程得 $z=2$，故 $P=(1,1,2)$.

2. **Solution**. A.

   两个偏导函数在点 (x_0,y_0) 处连续可推出函数在该点可微；可微又必推出两个偏导数存在.

   但偏导数存在不能推出可微；可微也不能推出偏导函数连续. 因此成立的是

   $$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1).$$

3. **Solution**. C.

   原积分区域在极坐标下为

   $$0\le r\le 1,\qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},$$

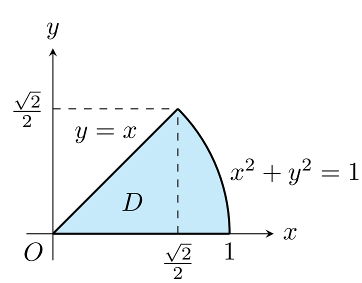
   即第一象限中由 x 轴、直线 $y=x$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 围成的扇形区域.

   改用直角坐标时，$0\le y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且对固定的 y，有

   $$y\le x\le\sqrt{1-y^2}.$$

   因而

   $$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$



4. **Solution**. B.

在圆柱面上 $x^2+y^2=R^2$，故被积函数恒为 R^2. 圆柱侧面积为 $2\pi Rh$，所以

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S = R^2\cdot 2\pi Rh = 2\pi hR^3.$$

5. **Solution**. D.

对于 A 选项，令 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，但调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

对于 B 选项，令 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=1$.

对于 C 选项，令

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n},\qquad b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

则 $\sum b_n$ 由 Leibniz 判别法可知收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=1.$$

但 $\sum a_n=\sum b_n+\sum\dfrac{1}{n}$ 发散.

对于 D 选项，若 $\sum a_n$ 绝对收敛，则 $\sum |a_n|$ 收敛. 又 $\sum |a_{2n}|$ 是 $\sum |a_n|$ 的子级数，故 $\sum |a_{2n}|$ 收敛，因而 $\sum a_{2n}$ 绝对收敛，故 D 正确.

6. **Solution**. B.

该级数是 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 作偶延拓后的余弦级数，因此其和函数为周期为 2π 的偶函数.

故

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1.$$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $3z^2-y^2=16$.

母线平行于 x 轴，故所求柱面方程中应消去 x. 由

$$x^2+y^2-z^2=0$$

得 $x^2=z^2-y^2$. 代入 $2x^2+y^2+z^2=16$，得

$$2(z^2-y^2)+y^2+z^2=16,$$

即

$$3z^2-y^2=16.$$

8. **Solution**. $(0, x, 0)$.

先求

$$\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ y & z & xy \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = (xz, 0, -z).$$

因此

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \left(\frac{\partial(-z)}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z}, \frac{\partial(xz)}{\partial z} - \frac{\partial(-z)}{\partial x}, \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} \right) = (0, x, 0).$$

9. **Solution**. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

用极坐标代换，

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2\pi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\, \mathrm{d}r = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

由题设得 $\dfrac{2\pi a^3}{3} = \pi$，故

$$a^3 = \frac{3}{2}, \qquad a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

10. **Solution**. 5.

记

$$P = 2xy - y^4 + 3, \qquad Q = x^2 - 4xy^3.$$

因为 $P_y = 2x - 4y^3 = Q_x$，所以该曲线积分与路径无关.

取势函数 Φ，由 $\Phi_x = P$ 得

$$\Phi = x^2y - xy^4 + 3x + \varphi(y).$$

再由 $\Phi_y = Q$ 可知 $\varphi'(y) = 0$，故可取 $\Phi = x^2y - xy^4 + 3x$. 因而

$$\int_L P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \Phi(2,1) - \Phi(1,0) = 6 - 1 = 5.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，并与 z 轴相交于点 $Q(0,0,c)$，则

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{PQ} = (-1, -2, c-3).$$

由题设知 $\boldsymbol{s} \perp (1,1,1)$，故 $c = 6$. 所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

12. **Solution**. 记 f_1, f_2, f_{12}, f_{22} 分别表示 f 对其变量的一阶、二阶偏导数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x\, f_1 + \frac{1}{y} f_2.$$

因而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x\cos x}{y^2} f_{12} - \frac{1}{y^2} f_2 - \frac{x}{y^3} f_{22}.$$

13. **Solution**. 对方程组

$$\begin{cases} z = xf(x+y), \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + x\left(1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) f', \\ F_1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} F_2 + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} F_3 = 0. \end{cases}$$

消去 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(f + xf')F_2 - xf'F_1}{F_2 + xf'F_3}.$$

14. **Solution**. 由球域的对称性可知

$$\iiint\limits_V yz\,\mathrm{d}v = 0, \qquad \iiint\limits_V (x^2 + yz + z^2)\,\mathrm{d}v = \frac{2}{3}\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}v.$$

用球坐标代换，

$$I = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^4\,\mathrm{d}\rho = \frac{8\pi}{15}.$$

15. **Solution**. 由 Green 公式，

$$I = \iint\limits_D \left[\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D 2(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

圆周 $x^2 + y^2 = x + y + 1$ 所围区域 D 的圆心为 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，半径为 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，故

$$I = 2(\bar{x} + \bar{y})\sigma = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3\pi}{2} = 3\pi.$$

16. **Solution**. 记 $a_n = \dfrac{1}{n3^n}$，用比值判别法计算

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{3},$$

从而收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho} = 3$.

当 $x = 6$ 时，原级数化为调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，因而发散；

当 $x = 0$ 时，原级数化为交错调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，因而收敛.

故原级数收敛域为 $[0, 6)$. 下面计算其和函数 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$.

对 $S(x)$ 求导，得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^{n-1}}{n\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n,$$

这是一个首项为 $\dfrac{1}{3}$，公比为 $\dfrac{x-3}{3}$ 的几何级数，因此 $S'(x) = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x-3}{3}} = \dfrac{1}{3-(x-3)} = \dfrac{1}{6-x}$.

注意到 $S(3) = 0$，因此

$$S(x) = \int_3^x \frac{1}{6-t}\,dt = -\ln|6-x| + \ln|3| = \ln\left(\frac{3}{6-x}\right), \quad x \in [0,6).$$

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 设所求点为 $M(x,y,z)$，则

$$\nabla f(M) = (2x, 2y, 2z), \qquad \boldsymbol{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

故方向导数为

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{n}} = \sqrt{2}(-y+z).$$

即在约束条件 $x^2+2y^2+2z^2=1$ 下，求 $-y+z$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法，设 $L(x,y,z,\lambda) = -y+z+\lambda(x^2+2y^2+2z^2-1)$，令 $\nabla L = 0$，得

$$\begin{cases} 2\lambda x = 0, \\ 4\lambda y - 1 = 0, \\ 4\lambda z + 1 = 0, \\ x^2+2y^2+2z^2 = 1. \end{cases}$$

由前两个方程可知 $x=0$，且 $z=-y$. 代入约束方程得

$$4y^2 = 1, \qquad y = \pm\frac{1}{2}, \qquad z = \mp\frac{1}{2}.$$

因而受检点为

$$M_1\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \qquad M_2\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

比较方向导数的值，

$$\frac{\partial f(M_1)}{\partial \boldsymbol{n}} = -\sqrt{2}, \qquad \frac{\partial f(M_2)}{\partial \boldsymbol{n}} = \sqrt{2},$$

故所求点为

$$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

18. **Solution**. 取底面 $S_1 : z = 0,\ x^2+y^2 \le 1$ 的下侧，使 $S + S_1$ 封闭并取外侧法向.

由 Gauss 公式，

$$\begin{aligned} \varPhi &= \oiint\limits_{S+S_1} \left(2x^3, 2y^3, 2z^3\right) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_1} 3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iiint\limits_{V} \left(6x^2+6y^2+6z\right)\,\mathrm{d}v + 3\iint\limits_{S_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

用柱坐标代换，

$$\begin{aligned}\Phi &= 6\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z\right)\,\mathrm{d}v + 3\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= 6\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-z}} r\left(r^2+z\right)\,\mathrm{d}r - 3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= 12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{4}(1-z)^2+\frac{1}{2}(1-z)z\right]\mathrm{d}z - 3\pi\\
&= 3\pi\int_0^1\left(1-z^2\right)\,\mathrm{d}z - 3\pi = -\pi.\end{aligned}$$

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 记部分和

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n.$$

对偶数项部分和，有

$$S_{2n} = (a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

由于 $\{a_n\}$ 单调减少，故 $a_{2k-1}-a_{2k}\ge 0$，从而 $\{S_{2n}\}$ 单调增加.

又

$$S_{2n} = a_1-(a_2-a_3)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\le a_1,$$

因而 $\{S_{2n}\}$ 单调有界，故收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

对奇数项部分和，

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S.$$

因此奇、偶部分和有相同极限 S，故原级数收敛.

20. **Solution**. 因 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，所以

$$f_y(1,y)=0,\qquad f_x(x,1)=0.$$

由两次分部积分，

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xyf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\left[\int_0^1 xy\,\mathrm{d}f_x(x,y)\right]\mathrm{d}x = \int_0^1\left[xyf_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 xf_x(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\
&= -\int_0^1\left[\int_0^1 xf_x(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = -\int_0^1\left[\int_0^1 x\,\mathrm{d}f(x,y)\right]\mathrm{d}y\\
&= -\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = a.\end{aligned}$$