CHAPTER 1

2016-2017 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$，$f(x) \neq 0$ 有三个解 $y_1 = x, y_2 = \mathrm{e}^x, y_3 = \mathrm{e}^{3x}$，求此微分方程满足初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 的特解.

2. 设 $y = y(x)$ 在区间 $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ 满足微分方程 $y'' - (y')^2 = 1$，$y|_{x=0} = 0$，$y'|_{x=0} = 0$，求特解.

3. 求过点 $M(2, -2, 3)$ 与直线 $L_1 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{0}$ 垂直相交的直线 L 的方程.

4. 设曲线 $\begin{cases} x+y-z=1, \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$ ，求其在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

5. 设 $z=f(x\mathrm{e}^y)$，其中 f 有一阶导数，$f'(0)=2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$.

6. 设函数 $f(u,v,w)$ 有二阶连续偏导数，$z=f(x,x+y,xy)$，求混合偏导函数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. 计算 $I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt[3]{y}} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

8. 计算二重积分
$$I=\iint\limits_D \left(x^3\sin y+(x+y)^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
其中 $D: x^2+y^2\le 2y$.

9. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 V 位于第一卦限，由曲面 $z=0, z=xy, y=x, y=1$ 围成.

10. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V (x+z)\,\mathrm{d}v$，其中 $V: \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$.

2 综合计算题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 设方程组 $\begin{cases} F(x+y,y-z)=0, \\ z=f(xy) \end{cases}$，其中 F,f 具有连续的一阶偏导，且 $F_1-yf'F_2\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

12. 在椭球面 $x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ 的方向导数最大.

13. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)+3f(x)+2x\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

14. 计算 $I=\iint\limits_D |x+y-1|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是圆域 $D: x^2+y^2\leq 1$.

15. 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y^2}$，讨论 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的

（1）连续性；

（2）偏导数存在性；

（3）可微性；

（4）沿方向 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数的存在性，对存在情形计算出结果.

CHAPTER 2

2016-2017 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 因 $\mathrm{e}^x - x, \mathrm{e}^{3x} - x$ 是齐次方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ 的两个线性无关解，

   所以原微分方程的通解为
   $$y = C_1(\mathrm{e}^x - x) + C_2(\mathrm{e}^{3x} - x) + x.$$
   将 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 代入上式，得 $C_1 = C_2 = 1$，故所求特解为
   $$y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{3x} - x.$$

2. **Solution**. 令 $p(x) = y'$，则原方程化为 $p' = p^2 + 1, p|_{x=0} = 0$.

   分离变量得
   $$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = \mathrm{d}x.$$
   积分得 $\arctan p = x + C$，由初始条件得 $C = 0$，所以 $p = y'(x) = \tan x$. 再积分，并代入 $y|_{x=0} = 0$，得
   $$y(x) = -\ln(\cos x), \qquad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

3. **Solution**. 过点 $M(2, -2, 3)$ 且与直线 L_1 垂直的平面方程为
   $$(x-2) + 2(y+2) = 0.$$
   将 L_1 的参数方程 $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 4$ 代入平面方程，得 $t = -1$，从而交点为 $P(-2, 0, 4)$.

   所求直线为过点 M 和点 P 的直线，故其方程为
   $$\frac{x+2}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{-1}.$$

4. **Solution**. 令
   $$F(x,y,z) = x + y - z - 1, \qquad G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$
   则
   $$\nabla F = (1, 1, -1), \qquad \nabla G(1,1,1) = 2(1,1,1).$$

切线方向向量可取

$$\boldsymbol{s} = (1, 1, -1) \times (1, 1, 1) = 2(1, -1, 0).$$

所以切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{0},$$

法平面方程为

$$x - y = 0.$$

5. **Solution**. 因

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^y f'(x\mathrm{e}^y),$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, y) = \mathrm{e}^y f'(0) = 2\mathrm{e}^y.$$

由偏导定义可知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,(2\mathrm{e}^y)\Big|_{y=1} = 2\mathrm{e}.$$

6. **Solution**. 记 f_i, f_{ij} 分别为 $f(u, v, w)$ 关于第 i 个变量的一阶偏导和二阶偏导.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_2 + y f_3,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{12} + x f_{13} + f_{22} + x f_{23} + f_3 + y f_{32} + xy f_{33} \\ &= f_{12} + x f_{13} + f_{22} + (x + y) f_{23} + f_3 + xy f_{33}.\end{aligned}$$

7. **Solution**. 交换积分次序，得

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \int_{x^3}^{x} \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}(x - x^3)\,\mathrm{d}x.$$

令 $t = x^2$，则

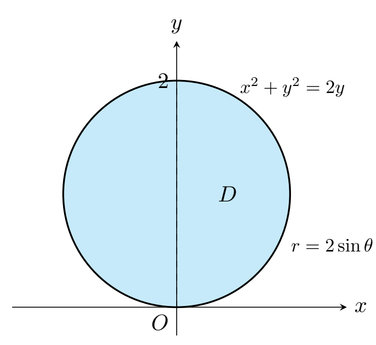
$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^t (1 - t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e} - 2}{2}.$$

8. **Solution**.

由于 D 关于 y 轴对称，$\displaystyle\iint_D x^3 \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$，$\displaystyle\iint_D 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

因此利用极坐标代换得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cdot r\,\mathrm{d}r \\ &= 4\int_0^{\pi} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$



9. **Solution**. 记 D 为 V 在 xOy 面上的投影，则 D 由直线 $x=0, y=x, y=1$ 围成. 因此

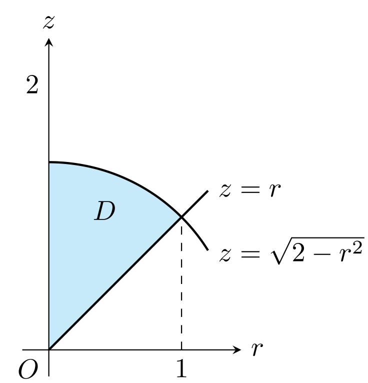
$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{xy} xy^2z^3\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4}\iint\limits_D x^5y^6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 x^5y^6\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{28}\int_0^1 (x^5 - x^{12})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{28}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{312}.
\end{aligned}
$$

10. **Solution**.

由对称性可得 $\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}v = 0$.

用柱坐标代换，得

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V z\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z\,\mathrm{d}z \\
&= \pi\int_0^1 (2-2r^2)r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$



2 综合计算题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. 视 x, z 为因变量，方程组两边对 y 求导，得

$$
\begin{cases}
F_1\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 1\right) + F_2\left(1 - \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right) = 0, \\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = f'\left(x + y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right).
\end{cases}
$$

于是

$$
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{f'\left[(x-y)F_1 - yF_2\right]}{F_1 - yf'F_2}.
$$

12. **Solution**. 设所求点为 $M(x,y,z)$，则 $\nabla f(M) = (2x, 2y, -1)$，且 $\boldsymbol{n}^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3)$.

函数 $f(x,y,z)$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$
\frac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2x - 4y - 3).
$$

即在约束 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ 下求 $2x - 4y - 3$ 的最大值. 构造 Lagrange 函数

$$
L(x,y,z,\lambda) = 2x - 4y - 3 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1).
$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -4 + 4\lambda y = 0, \\ L_z = 4\lambda z = 0, \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

得 $x = -y, z = 0$. 代入约束方程，得

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad y = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad z = 0.$$

比较方向导数的值，可知所求点为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right).$$

13. **Solution**. 令 $u = tx$，则

$$x\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

从而原方程变为

$$f'(x) + 3f(x) + 2\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x}.$$

由上式可知 $f''(x)$ 存在，两边求导得

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = -\mathrm{e}^{-x}. \tag{*}$$

特征方程 $r^2 + 3r + 2 = 0$ 有相异实根 $r = -2, -1$，对应齐次方程通解为

$$Y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

设特解为 $y^* = Ax\mathrm{e}^{-x}$，代入方程 (*) 得 $A = -1$，所以

$$f(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}.$$

由原方程可得 $f'(0) = -2$，又 $f(0) = 1$，代入得 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 因此

$$f(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}.$$

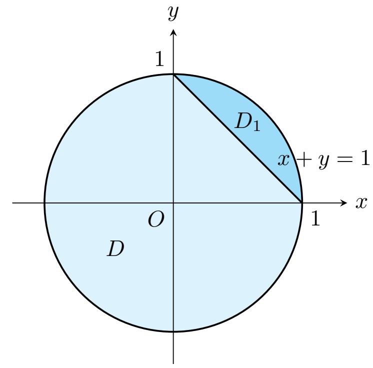
14. **Solution**.

用 $x+y=1$ 将区域 D 分为

$D_1 = D \cap \{(x,y) \mid x+y \geq 1\}$ 和 $D_2 = D \setminus D_1$.

记 $g = x+y-1$，则

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} g \,\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_2} g \,\mathrm{d}\sigma \\
&= 2\iint\limits_{D_1} g \,\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D} g \,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$



因为

$$
\iint\limits_{D} g \,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} (-1) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -\pi,
$$

且

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D_1} g \,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y-1) \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
I = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.
$$

15. **Solution**.

（1）由于 $f(x,y) = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}$ 是初等函数，且在全平面有定义，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

（2）因为 $f(x,0) = 0$，所以 $f_x(0,0) = 0$；同理 $f_y(0,0) = 0$.

（3）考虑极限

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}
$$

考虑 $y = x$，$(x,y) \to (0,0)$ 时，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

（4）利用方向导数的定义，得

$$
\frac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{n}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)}{\rho} = \sqrt[3]{\cos\alpha}\sqrt[3]{\sin^2\alpha}.
$$