CHAPTER 1

2016-2017 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的下面四条性质：

（1）连续；（2）两个偏导数存在；（3）可微；（4）沿方向 $(1,0)$ 的方向导数存在.

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则成立（　　）.

A. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$　　**B.** $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

C. $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$　　**D.** $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$

2. 将 $I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-y}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 化为先对 y 后对 x 的逐次积分，正确结果是（　　）.

A. $I = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

B. $I = \int_{-y}^{y} \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$

C. $I = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{-x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

D. $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

3. 设 L 表示圆 $x^2+y^2=R^2(R>0)$，取顺时针方向，则积分 $\oint_L -x^2y\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y =$（　　）.

A. πR^4　　**B.** $-\dfrac{\pi R^4}{2}$

C. $-\pi R^4$　　**D.** $\dfrac{\pi R^4}{2}$

4. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，下列说法中正确的是（　　）.

A. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散

B. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散

C. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛

D. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则当 n 充分大时，$a_n \geq \dfrac{1}{n}$

5. 二阶常系数线性微分方程 $y'' - 3y' - 4y = x + \mathrm{e}^{-x}$ 的特解的待定形式为（　　）.

A. $y^* = ax + b + c\mathrm{e}^{-x}$　　**B.** $y^* = x(ax+b) + (cx+d)\mathrm{e}^{-x}$

C. $y^* = ax + b + cx\mathrm{e}^{-x}$　　**D.** $y^* = x(ax+b) + cx\mathrm{e}^{-x}$

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是将函数 $f(x) = x + 1(0 \leq x \leq \pi)$ 做奇延拓后展开成的傅立叶级数，其和函数为 $S(x)(-\infty < x < +\infty)$，则 $S\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right) =$（　　）.

A. $-\dfrac{\pi}{2} + 1$　　**B.** $\dfrac{\pi}{2} + 1$

C. $-\dfrac{\pi}{2} - 1$　　**D.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设函数 $z = x\mathrm{e}^y$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} =$________________.

8. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$，则 $\iint\limits_D \left[(x+1)^2 + y^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ ________________.

9. 设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$，则 $\oint_L (x^2 + xy)\,\mathrm{d}s =$ ________________.

10. 设曲面 $S = \{(x,y,z) : z = 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$，则 $\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S =$ ________________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求经过直线 $L: \begin{cases} 2x + 3y - z - 8 = 0, \\ y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi: x + y + z - 4 = 0$ 平行的平面方程 π_1.

12. 设 $z=f(\mathrm{e}^{2x},xy)$，其中 f 具有二阶连续导数，且 $f_2'(1,0)=2$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=3}}$.

13. 设变量 x,y,t 满足方程 $x=F(t,y)$ 和 $f(x+y+t)=3y$，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导数，记 $F_1=\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial t}$，$F_2=\dfrac{\partial F(t,y)}{\partial y}$，且 $1+F_1\neq 0$，$f'\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

14. 设 L 是依逆时针方向的下半圆周 $x^2+y^2=x\ (y\leq 0)$，求曲线积分

$$I=\int_L (1-y-\mathrm{e}^x\sin y)\,\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{d}y.$$

15. 设 S 为曲面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，求曲面积分

$$I=\iint_S xyz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{z^3}{3}+1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

16. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 求函数 $f(x,y,z)=xy+z^2$ 在平面 $x=y$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆周上的最大值和最小值.

18. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(x)+\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x$，求 $\varphi(x)$.

5 分析证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 讨论级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^p}\right)-\cos\left(\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right]\qquad(p>0)$$
的敛散性，收敛时指明是条件收敛还是绝对收敛.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b](a>0)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明:
$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{x}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geq\frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$

CHAPTER 2

2016-2017 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

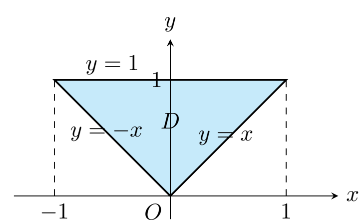
1. **Solution**. D.

   可微必推出两个偏导数存在，而偏导数是特殊方向的方向导数. 由于方向 $(1,0)$ 即为 x 轴正方向，故偏导数存在可直接推出该方向导数存在，因此 $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$ 成立.

2. **Solution**. C.

   如图，积分区域为

   $$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ -y \le x \le y\}.$$

   改为先对 y 积分时，$-1 \le x \le 1$，且当 $-1 \le x \le 0$ 时，$-x \le y \le 1$；当 $0 \le x \le 1$ 时，$x \le y \le 1$.

   故

   $$I = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{-x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

3. **Solution**. B.

   记 $P = -x^2 y$, $Q = xy^2$. 若 L 取逆时针方向，则由 Green 公式，

   $$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi R^4}{2}.$$

   题中为顺时针方向，所以积分值为 $-\dfrac{\pi R^4}{2}$.

4. **Solution**. A.

   对于 A，B 选项，记级数的前 $2N$ 项部分和为 S_{2N}，绝对值级数的前 $2N$ 项部分和为 T_{2N}，则

   $$\begin{aligned} S_{2N} + T_{2N} &= (-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots - a_{2N-1} + a_{2N}) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2N-1} + a_{2N}) \\ &= 2\sum_{n=1}^{N} a_{2n}. \end{aligned}$$

若 $\sum(-1)^n a_n$ 条件收敛，则 S_{2N} 收敛，但 T_{2N} 发散，所以 $\sum a_{2n}$ 发散.

若 $\sum(-1)^n a_n$ 绝对收敛，则 S_{2N} 和 T_{2N} 都收敛，所以 $\sum a_{2n}$ 收敛.

对于 C 选项，令 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，则 $\sum a_n$ 收敛，且 $\sum(-1)^n a_n = \sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛.

对于 D 选项，令 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{n^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$，则 $\sum a_n$ 发散，但当 n 充分大且为奇数时，$a_n < \dfrac{1}{n}$.

5. **Solution**. C.

   方程对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) = 0.$$

   所以齐次方程的通解为 $y_h = C_1 \mathrm{e}^{4x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$.

   对于非齐次项 $y_1 = x$，由于 $\lambda = 0$ 不是齐次方程的根，所以特解为 $y_1^* = ax + b$；

   对于非齐次项 $y_2 = \mathrm{e}^{-x}$，由于 $\lambda = -1$ 是齐次方程的单根，所以特解为 $y_2^* = cx\mathrm{e}^{-x}$.

   由解的叠加原理，特解的待定形式为 $y^* = y_1^* + y_2^* = ax + b + cx\mathrm{e}^{-x}$.

6. **Solution**. C.

   奇延拓后的和函数是以 2π 为周期的奇函数. 因此

$$S\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 1.$$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\mathrm{e}\,\mathrm{d}x$.

   因为

$$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y,$$

   所以 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \mathrm{e}\,\mathrm{d}x$.

8. **Solution**. $\dfrac{3\pi}{4}$.

   在上半圆盘 D 上，由对称性可知 $\displaystyle\iint_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. 因此

$$\begin{aligned}\iint_D \left[(x+1)^2 + y^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \pi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

9. **Solution**. π.

   令 $x = \cos t$，$y = \sin t\ (0 \le t \le 2\pi)$，则 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$. 因而

$$\oint_L (x^2 + xy)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \cos t \sin t)\,\mathrm{d}t = \pi.$$

10. **Solution**. 4.

曲面为平面方形区域，$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，故由对称性可知

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{\substack{-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1}} (x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\substack{-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4.\end{aligned}$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 因 π_1 与 $\pi : x+y+z-4=0$ 平行，可设

$$\pi_1 : x+y+z+D=0.$$

在方程组中令 $z=0$，可取直线 L 上一点 $P(10,-4,0)$，代入得 $D=-6$，故

$$\pi_1 : x+y+z-6=0.$$

12. **Solution**. 先求

$$z_x = 2\mathrm{e}^{2x} f_1'(\mathrm{e}^{2x}, xy) + y f_2'(\mathrm{e}^{2x}, xy).$$

令

$$G(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} f_1'(\mathrm{e}^{2x}, xy) + y f_2'(\mathrm{e}^{2x}, xy),$$

则 $G(0,y) = 2f_1'(1,0) + y f_2'(1,0) = 2f_1'(1,0) + 2y$，$G_y(0,y) = f_2'(1,0) \equiv 2$，因而

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\ y=3}} = G_y(0,3) = 2.$$

13. **Solution**. 由

$$\begin{cases} x = F(t,y), \\ f(x+y+t) = 3y \end{cases}$$

确定 $t=t(y)$, $x=x(y)$. 两边对 y 求导，得

$$\begin{cases} x' = F_1 t' + F_2, \\ (x'+t'+1)f' = 3. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{f'F_2 + (3-f')F_1}{(1+F_1)f'}.$$

14. **Solution**. 补线段 $L_1 : y=0$, $x : 1 \to 0$，则 $L+L_1$ 封闭并取正向. 故

$$I = \oint_{L+L_1} (1-y-\mathrm{e}^x \sin y)\,\mathrm{d}x + (1-\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{d}y - \int_{L_1} \mathrm{d}x.$$

由 Green 公式，记 $D:\{(x,y)|x^2+y^2\le x, y\le 0\}$，则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+L_1} (1-y-\mathrm{e}^x\sin y)\,\mathrm{d}x + (1-\mathrm{e}^x\cos y)\,\mathrm{d}y - \int_1^0 \mathrm{d}x \\ &= \iint_D \left[-\mathrm{e}^x\cos y - (-1-\mathrm{e}^x\cos y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1 \\ &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 1 = \frac{\pi}{8} + 1. \end{aligned}$$

15. **Solution**. 记底面 $S_1: z=0,\ x^2+y^2\le 1$ 取下侧，区域 $\Sigma:\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1, z\le 0\}$，

则 $S+S_1$ 封闭并指向内侧. 所以由 Gauss 公式可知

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{S+S_1} xyz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + x^2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{z^3}{3}+1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{S_1}\left(\frac{z^3}{3}+1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\iiint_\Sigma \left(yz+x^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\iiint_\Sigma \left(yz+x^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \pi. \end{aligned}$$

由对称性可知 $\displaystyle\iiint_\Sigma yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$，$\displaystyle\iiint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Sigma y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

因此

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3}\iiint_\Sigma \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \pi \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r + \pi \\ &= -\frac{2}{3}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5} + \pi = \frac{11\pi}{15}. \end{aligned}$$

16. **Solution**. 注意到

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \qquad |x|<1,$$

上式两端从 0 积分到 x，并利用 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，得

$$f(x) - \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|<1.$$

又当 $x=1$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛；当 $x=-1$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 也收敛，

因此

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|\le 1.$$

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 用 Lagrange 乘数法，设 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=xy+z^2+\lambda(x-y)+\mu(x^2+y^2+z^2-4)$，令 $\nabla L=0$，得

$$\begin{cases} L_x=y+2\mu x+\lambda=0, \\ L_y=x+2\mu y-\lambda=0, \\ L_z=2z+2\mu z=0, \\ L_\lambda=x-y=0, \\ L_\mu=x^2+y^2+z^2-4=0. \end{cases}$$

解得四个驻点 $P_1(0,0,2)$，$P_2(0,0,-2)$，$P_3\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$，$P_4\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)$.

因为 $f\,(0,0,2)=f(0,0,-2)=4$，$f\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)=f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)=2$，

因此最大值为 4，最小值为 2.

18. **Solution**. 由 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 可知 $\varphi(x)$ 存在二阶连续导数，且

$$\varphi''(x)+\varphi(x)=\mathrm{e}^x.$$

在原方程两边令 $x=0$ 可得 $\varphi'(0)=1$，再结合 $\varphi(0)=0$，得到定解问题

$$\begin{cases} \varphi''+\varphi=\mathrm{e}^x, \\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1. \end{cases}$$

非齐次方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，所以齐次方程的通解为 $\varphi_h=C_1\cos x+C_2\sin x$.

对于非齐次项 e^x，由于 $\lambda=1$ 不是齐次方程的根，所以可设特解为 $\varphi^*=ae^x$.

代入方程得 $ae^x+ae^x=\mathrm{e}^x$，故 $a=\dfrac{1}{2}$，因此 $\varphi^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

因此非齐次方程的通解为 $\varphi=\varphi_h+\varphi^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

将 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$ 代入上式，得

$$\begin{cases} 0=\dfrac{1}{2}+C_1, \\ 1=\dfrac{1}{2}+C_2. \end{cases}$$

解得 $C_1=-\dfrac{1}{2}$, $C_2=\dfrac{1}{2}$. 因此

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x.$$

5 分析证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Solution**. 设

$$u_n=1-\cos\frac{(-1)^n}{n^p}, \qquad v_n=\sin\frac{(-1)^n}{n^p}.$$

则原级数可视作 $\sum u_n-\sum v_n$. 由

$$1-\cos t\sim\frac{t^2}{2}\quad(t\to 0)$$

知 $\sum u_n$ 当且仅当 $p > \dfrac{1}{2}$ 时收敛. 又

$$v_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n^p}$$

是交错级数，且 $\sin\dfrac{1}{n^p} \sim \dfrac{1}{n^p}$，故当 $p > 0$ 时由 Leibniz 判别法可知该级数收敛；
且当 $p > 1$ 时绝对收敛，当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.
综上，原级数当 $p > 1$ 时绝对收敛，当 $\dfrac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛，当 $0 < p \leq \dfrac{1}{2}$ 时发散.

20. **Proof**. 记 $D = [a,b] \times [a,b]$，则

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{x}{f(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{y}{f(y)}\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \frac{xyf(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

由 D 的轮换对称性可知

$$I = \iint\limits_D \frac{xyf(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(\frac{xyf(x)}{f(y)} + \frac{xyf(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\geq \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b x\,\mathrm{d}x \int_a^b y\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2(b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$