CHAPTER 1

2018-2019 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 以下关于数列的命题，正确的是（　　）.

   A. 一个有界数列与一个无界数列的和是无界数列

   B. 两个无界数列的和是无界数列

   C. 一个有界数列与一个无界数列的乘积是无界数列

   D. 两个无界数列的乘积是无界数列

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则函数 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x=a$ 处（　　）.

   A. 可导　　**B.** 不连续

   C. 连续但不一定可导　　**D.** 不可导

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内（　　）.

   A. 有界　　**B.** 可导

   C. 存在最大值　　**D.** 原函数存在

4. 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 有（　　）.

   A. 一个极小值和一个极大值　　**B.** 一个极小值

   C. 两个极小值　　**D.** 两个极大值

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内满足 $f'(x)<0$，$f''(x)>0$，则在区间 (a,b) 内（　　）.

   A. $f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 下凸　　**B.** $f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 上凸

   C. $f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 下凸　　**D.** $f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 上凸

6. 设 $M=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$，$N=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sec x}\,\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$，则 M,N,K 的大小关系为（　　）.

   A. $M<N<K$　　**B.** $M<K<N$

   C. $N<M<K$　　**D.** $K<N<M$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设 $u = x + a\ln(1-x) + bx\sin(3x)$ 是 x 的 3 阶无穷小，则 $a =$ ________，$b =$ ________.

8. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 的拐点坐标为 ____________.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{1-\cos x} \tan t \, \mathrm{d}t}{\sin x^4} =$ ____________.

10. 曲线 $x = 2\cos^3 t$，$y = 2\sin^3 t$，$0 \le t \le 2\pi$ 的长度为 ____________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求曲线 $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 5}(x > 0)$ 的渐近线.

12. 写出 $f(x) = \ln(1+x)$ 带 Lagrange 余项的 n 阶 Maclaurin 公式.

13. 求不定积分 $I = \int \dfrac{\sqrt{x-3}}{2x} \, \mathrm{d}x$.

14. 求定积分 $I=\int_0^{\frac{1}{2}} x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

15. 求反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

16. 求微分方程 $y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x$ 的通解.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\in(-1,0)\cup(0,+\infty),\\ \mathrm{e}, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

18. 求平面图形 $0 \le y \le \cos x$，$0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导，且 $f(a) = f(b)$，$|f''(x)| \le M$，证明:

$$|f'(a) + f'(b)| \le M(b - a).$$

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导，并且 $f''(x) \le 0$，证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}.$$

CHAPTER 2

2018-2019 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. A.

   对于 A 选项，假设 $\{a_n\}$ 是一个有界数列，$\{b_n\}$ 是一个无界数列，

   即 $\forall n \in \mathbf{N}^+$，$\exists M > 0$，使得 $|a_n| \leq M$，又 $\forall N > 0$，$\exists n_0 \in \mathbf{N}^+$，使得 $|b_{n_0}| > N$.

   则 $|a_{n_0} + b_{n_0}| \geq |b_{n_0}| - |a_{n_0}| \geq N - M$，$\forall N - M > 0$，所以 $\{a_n + b_n\}$ 是一个无界数列.

   对于 B 选项，考虑 $a_n = n$，$b_n = -n$，则 $a_n + b_n \equiv 0$，$\{a_n + b_n\}$ 是一个有界数列.

   对于 C 选项，考虑 $a_n = 0$，$b_n = n$，则 $a_n b_n \equiv 0$，$\{a_n b_n\}$ 是一个有界数列.

   对于 D 选项，考虑 $a_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1 \end{cases}$，$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ n, & n = 2k-1 \end{cases}$，其中 $k \in \mathbf{N}^+$，

   则 $a_n b_n \equiv 0$，$\{a_n b_n\}$ 是一个有界数列.

2. **Solution**. C.

   由题意可知 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在，所以

   $$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = 0,$$

   即 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$，所以

   $$\lim_{x \to a} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[3]{f(a)},$$

   故函数 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处连续. 考虑 $f(x) = x$，$a = 0$，则 $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处不可导，

   所以 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x = a$ 处连续但不一定可导.

3. **Solution**. D.

   对于 A 选项，考虑 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，取 $a = -1$，$b = 1$，则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续但无界.

   对于 B，C 选项，考虑 $f(x) = |x|$，取 $a = -1$，$b = 1$，则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续但不存在最大值，

   并且存在不可导点 $x = 0$.

   连续函数在区间内必然可积，所以 D 选项正确.

4. **Solution**. B.

因为

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3),$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增.

函数 $f(x)$ 只有一个唯一的极小值点 $x = \dfrac{3}{2}$，没有极大值点.

5. **Solution**. A.

由 $f'(x) < 0$，$f''(x) > 0$ 可知函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递减，曲线 $y = f(x)$ 下凸.

6. **Solution**. B.

在区间 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 内，$\sin x \le \tan x \le \sec x$，所以 $M < K < N$.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $a = 1$，$b = \dfrac{1}{6}$.

由 Taylor 公式，

$$\begin{aligned} u &= x + a\ln(1-x) + bx\sin(3x) \\ &= x - a\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + bx\left(3x + o(x^2)\right) \\ &= (1-a)x + \left(-\frac{a}{2} + 3b\right)x^2 - \frac{a}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

所以 $1 - a = 0$，$-\dfrac{a}{2} + 3b = 0$，解得 $a = 1$，$b = \dfrac{1}{6}$.

8. **Solution**. $(2, -3)$.

计算

$$y' = 3x^2 - 12x + 5, \quad y'' = 6x - 12,$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 2$，且当 $x < 2$ 时，$y'' < 0$，当 $x > 2$ 时，$y'' > 0$，

所以曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 具有拐点 $(2, -3)$.

9. **Solution**. $\dfrac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\tan t\,\mathrm{d}t}{\sin x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(1-\cos x)\cdot\sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{8x} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

10. **Solution**. 12.

因为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{(-6\cos^2 t\sin t)^2 + (6\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 6\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 3|\sin 2t|\mathrm{d}t,$$

故

$$s = 3\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\mathrm{d}t = 6\int_0^{\pi} |\sin u|\mathrm{d}u = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\,\mathrm{d}u = 12.$$

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 曲线没有竖直渐近线.

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = 2,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(y-2x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+5}-2x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+2x+5}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以曲线的斜渐近线为 $y = 2x+\dfrac{1}{2}$.

12. **Solution**. $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x)$,

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 与 x 之间.

由于 $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n\,n!}{(1+x)^{n+1}}$，所以 $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n\,x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$.

13. **Solution**. 令 $u = \sqrt{x-3}$，则 $x = t^2+3$，$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$,

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{\sqrt{x-3}}{2x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{u}{2(u^2+3)}\cdot 2u\,\mathrm{d}u\\ &= \int\left(1-\frac{3}{u^2+3}\right)\mathrm{d}u\\ &= u - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}} + C\\ &= \sqrt{x-3} - \sqrt{3}\arctan\sqrt{\frac{x-3}{3}} + C.\end{aligned}$$

14. **Solution**.

$$\begin{aligned}I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x^2 &= \frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{48} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{48}.\end{aligned}$$

15. **Solution**. 记 $J=\int \mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}
J =& -\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\cos x\\
=& -\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x\\
=& -\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\sin x\\
=& -\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\mathrm{e}^{-2x}\sin x-4\int \mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x\\
=& -\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\mathrm{e}^{-2x}\sin x-4J.
\end{aligned}$$

所以 $J=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2x}\cos x-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x}\sin x+C$,

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2x}\cos x-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{5}.$$

16. **Solution**. 令 $u=\frac{1}{y}$，则 $u'=-\frac{y'}{y^2}$，所以 $y'=-\frac{u'}{u^2}$.

微分方程 $y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x$ 变形为 $-\frac{u'}{u^2}+\frac{1}{xu}=\frac{\ln x}{u^2}$，即

$$u'-\frac{1}{x}u=-\ln x.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned}
u&=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left(C+\int(-\ln x)\,\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=x\left[C-\int\ln x\cdot\mathrm{d}(\ln x)\right]=x\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right).
\end{aligned}$$

所以原方程通解为 $xy\left(C-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)=1$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 当 $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$\ln f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$,

所以

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

当 $x=0$ 时,

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}\\
&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\
&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\\ &= \mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\\ &= \mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x} = -\frac{\mathrm{e}}{2} = f'(0),\end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 当 $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)$ 显然连续，

故 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上处处连续.

18. **Solution**. 旋转体的体积

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}\sin x = 2\pi\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= 2\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \pi^2-2\pi.\end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由 Taylor 公式，

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(b-a)^2,$$
$$f(a) = f(b)+f'(b)(a-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(a-b)^2,$$

其中 ξ_1,ξ_2 介于 a 与 b 之间. 上述两式相减得

$$\begin{aligned}f(b)-f(a)=0 &= f(a)-f(b)+(b-a)(f'(a)+f'(b))+\frac{1}{2}(b-a)^2(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))\\ &= (b-a)(f'(a)+f'(b))+\frac{1}{2}(b-a)^2(f''(\xi_1)-f''(\xi_2)).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|f'(a)+f'(b)| &= \frac{1}{2}(b-a)|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\\ &\le \frac{1}{2}(b-a)(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\\ &= M(b-a).\end{aligned}$$

20. **Solution**. 令 $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{(t-a)(f(a)+f(t))}{2}(x\ge a)$，

则

$$F'(t) = f(t)-\frac{f(a)+f(t)+(t-a)f'(t)}{2},$$
$$F''(t) = f'(t)-\frac{1}{2}f'(t)-\frac{1}{2}\left[f'(t)+(t-a)f''(t)\right] = -\frac{1}{2}(t-a)f''(t)\ge 0.$$

所以 $F'(t)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，$F'(t)\ge F'(a)=0$，因此

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}.$$