CHAPTER 1

2017-2018 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 设直线 l 过点 $M_0(1,2,0)$，且平行于平面 $\pi: x-2y+z-4=0$，又与直线 $l_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ 相交，求此直线的方程.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切向量、法平面方程.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ $(a>0)$ 分别在 xOy 面和 zOx 面上的投影曲线的方程.

4. 已知 $z(x,y)=\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\left|x+y^2-t\right|\mathrm{d}t$，其中 $0<x+y^2<1$，求 z_{xy}.

5. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 满足方程 $F(x+z,xy)=0$，且 $f(x,y)$，$F(s,t)$ 均具有连续的一阶偏导数，$f_2F_1+yf_2F_2-xf_1F_2\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$.

6. 求 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 x^2\cos(xy)\,\mathrm{d}x$.

7. 求 $I=\iint\limits_D (2x+3y-1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:|x|+|y|\leq 1$.

8. 设 $f(x,y)$ 连续，$f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $y=0, y=x^2$ 和 $x=1$ 所围成的区域，求 $f(x,y)$.

9. 求 $I = \iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

10. 求 $I = \iiint\limits_\Omega z^2\,\mathrm{d}v$，其中 $\Omega : 0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$a>0$.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 设函数 $u = f(x\sin y)$, 其中 $f(t)$ 具有连续的二阶导数, 且 $f'(0)=5$, 向量 $\boldsymbol{n} = (3,4)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$, $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{n}\partial x}\right|_{(0,0)}$.

12. 在平面曲线 $x^2+2y^2-2x=88$ 上求一点，使函数 $f(x,y)=3x^2+y^2$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n}=(3,4)$ 的方向导数最大.

13. 求由抛物线 $y^2=ax$ 与圆 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所围的包含一段 x 轴的区域 D 的面积 S.

14. 求 $I=\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是矩形区域：$|x|\le 2, |y|\le 2$.

15. 设二元函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处存在二阶偏导数 $f_{xx}(0,0)$ 和 $f_{yy}(0,0)$. 判断下列的结论是否正确，如果正确，请给出理由；如果不正确，请给出反例：

（1）$f_x(x,0)$ 在原点 $(0,0)$ 处关于 x 连续；

（2）二元函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续.

CHAPTER 2

2017-2018 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 设 l 与 l_1 的交点为 Q，并设 $Q(2+t, 1+2t, 2+t)$.

   因此直线 l 的方向向量可取
   $$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{M_0Q} = (t+1, 2t-1, t+2).$$
   又 l 平行于平面 π，所以 $\boldsymbol{s}$ 与 π 的法向量 $\boldsymbol{n} = (1, -2, 1)$ 垂直，即
   $$(t+1) - 2(2t-1) + (t+2) = 0.$$
   解得 $t = \dfrac{5}{2}$，故 $\boldsymbol{s} = \left(\dfrac{7}{2}, 4, \dfrac{9}{2}\right)$. 所以所求直线方程为
   $$\frac{x-1}{\frac{7}{2}} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{\frac{9}{2}}.$$

2. **Solution**. 令
   $$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6, \qquad G(x,y,z) = x^2+y^2-z.$$
   则
   $$\nabla F(1,1,2) = 2(1,1,2), \qquad \nabla G(1,1,2) = (2,2,-1).$$
   曲线在点 $(1,1,2)$ 处的切向量
   $$\boldsymbol{\tau} = (1,1,2) \times (2,2,-1) = -5(1,-1,0).$$
   因此切向量可取 $(1,-1,0)$，法平面方程为
   $$x - y = 0.$$

3. **Solution**. 该空间曲线在 xOy 面上的投影曲线为
   $$\begin{cases} x^2+y^2 = ax, \\ z = 0. \end{cases}$$

因为 $x^2+y^2=ax$，由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 得 $z^2=a^2-ax$，所以该空间曲线在 zOx 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z^2=a^2-ax, \\ y=0, \end{cases} \qquad (-a\le z\le a).$$

4. **Solution**. 记 $s=x+y^2$，由 $0<s<1$ 可得

$$z=\int_0^s \mathrm{e}^{t^2}(s-t)\,\mathrm{d}t+\int_s^1 \mathrm{e}^{t^2}(t-s)\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$z_x=\int_0^s \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_s^1 \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t.$$

对 y 求偏导，得

$$z_{xy}=2\mathrm{e}^{s^2}\frac{\partial s}{\partial y}=4y\mathrm{e}^{(x+y^2)^2}.$$

5. **Solution**. 由题设知方程组

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ F(x+z,xy)=0 \end{cases}$$

确定隐函数 $x=x(z)$，$y=y(z)$.

方程组两边对 z 求导，得

$$\begin{cases} 1=f_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+f_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}, \\ F_1\left(1+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)+F_2\left(y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)=0. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{xF_2+f_2F_1}{f_2F_1+yf_2F_2-xf_1F_2}.$$

6. **Solution**. 交换积分次序，得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x^2\cos(xy)\,\mathrm{d}y.$$

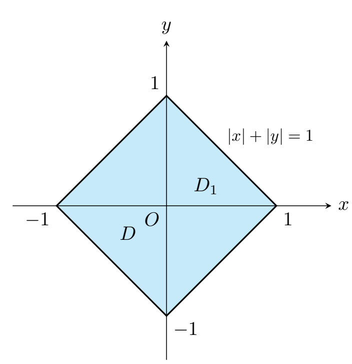
所以

$$I=\int_0^1 x\sin x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\cos 1).$$

7. **Solution**.

利用奇偶对称性及轮换对称性，得

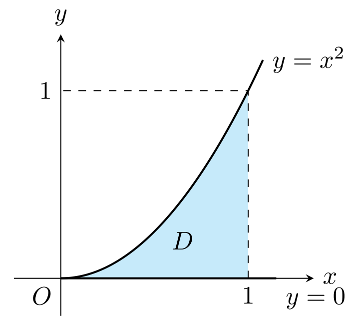
$$\begin{aligned} I&=\iint\limits_D (4x^2+9y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &=13\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$



记 D_1 为 D 在第一象限的部分，则 $D_1: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$，且 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2$. 因此

$$I=52\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\,\mathrm{d}y+2=52\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x+2=\frac{19}{3}.$$

8. **Solution**.
设
$$A=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
则 $f(x,y)=xy+A$.
于是
$$\begin{aligned}A&=\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}xy\,\mathrm{d}y+A\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{12}+\frac{A}{3}.\end{aligned}$$



解得 $A=\dfrac{1}{8}$，故
$$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}.$$

9. **Solution**. 旋转曲面方程为
$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
记 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 16$. 用柱坐标代换，得
$$\begin{aligned}I&=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}v\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 r\,\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}r^2}^8 r^2\,\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^4 r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r=\frac{1024\pi}{3}.\end{aligned}$$

10. **Solution**. 由题设可知 Ω 为上半球 $x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0$. 先对 z 积分，得
$$\begin{aligned}I&=\int_0^a z^2\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le a^2-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\pi\int_0^a z^2(a^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi a^5}{15}.\end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. 因为 $\boldsymbol{n}=(3,4)$，所以其单位方向向量为 $\boldsymbol{n}^\circ=\dfrac{1}{5}(3,4)$.
又
$$u_x=f'(x\sin y)\sin y,\qquad u_y=f'(x\sin y)x\cos y,$$
所以
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{f'(x\sin y)}{5}(3\sin y+4x\cos y).$$
利用偏导数定义，得
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{n}\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,0)-\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{5}f'(0)x}{x}=4.$$

12. **Solution**. 设所求点为 $M(x,y)$，则 $\nabla f(x,y)=(6x,2y)$，且 $\boldsymbol{n}^\circ=\dfrac{1}{5}(3,4)$.

函数 $f(x,y)$ 在点 $M(x,y)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y)=\frac{1}{5}(18x+8y)=\frac{2}{5}(9x+4y).$$

因此在约束 $x^2+2y^2-2x=88$ 下求 $9x+4y$ 的最大值. 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=9x+4y+\lambda(x^2+2y^2-2x-88).$$

令

$$\begin{cases} L_x=9+2\lambda x-2\lambda=0,\\ L_y=4+4\lambda y=0,\\ L_\lambda=x^2+2y^2-2x-88=0. \end{cases}$$

由前两个方程可得 $2(x-1)=9y$，代入约束方程得两个受检点

$$M_1(10,2),\qquad M_2(-8,-2).$$

比较方向导数的值，得 $M_1(10,2)$ 为所求点.

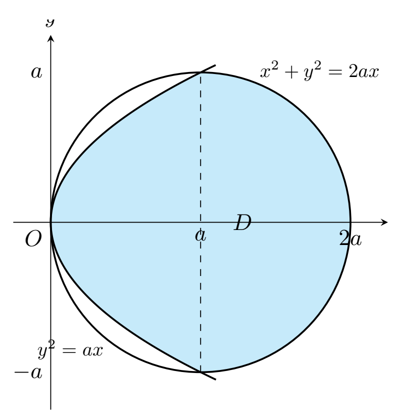
13. **Solution**.

区域 D 由抛物线 $y^2=ax$ 和圆 $x^2+y^2=2ax$ 围成，联立

$$\begin{cases} y^2=ax,\\ y^2=2ax-x^2 \end{cases}$$

得交点 $(0,0),(a,a),(a,-a)$.
所求面积为

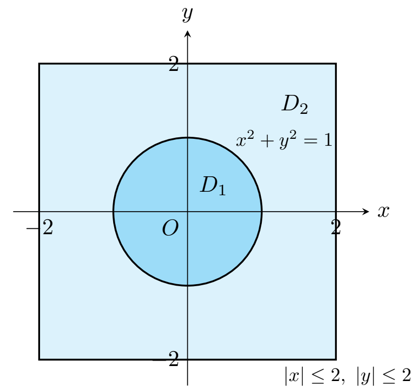
$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_0^a \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{a}}^a \mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_0^a\left(a-\frac{y^2}{a}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{4}{3}a^2. \end{aligned}$$



14. **Solution**.

记 $D_1: x^2+y^2\le 1$，$D_2 = D\setminus D_1$，并设 $g(x,y)=x^2+y^2-1$.
则

$$\begin{aligned} I &= -\iint\limits_{D_1} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\iint\limits_{D_1} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$



而

$$\iint\limits_{D} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{80}{3},$$

且

$$\iint\limits_{D_1} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (r^2-1)r\,\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$I = \frac{80}{3}+\pi.$$

15. **Solution**.

（1）正确. 因为根据偏导数定义，

$$f_{xx}(0,0) = \left.\frac{\mathrm{d}f_x(x,0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},$$

而一元函数可导必连续，所以 $f_x(x,0)$ 在 $x=0$ 处连续.

（2）不正确. 例如

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy=0, \\ 1, & xy\ne 0. \end{cases}$$

该函数在原点 $(0,0)$ 处不连续. 但是因为 $f(x,0)=0$，所以 $f_x(x,0)=0$，进而 $f_{xx}(0,0)=0$；类似可得 $f_{yy}(0,0)=0$. 因此即使 $f_{xx}(0,0)$ 和 $f_{yy}(0,0)$ 存在，$f(x,y)$ 也未必在原点连续.