CHAPTER 1

2017-2018 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 函数 $f(x,y)=|x|\cos y$ 在原点 $(0,0)$ 处（　　）.

   A. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 存在　　**B.** $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 不存在

   C. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在　　**D.** $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

2. 设 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，将
$$I=\iiint\limits_{\Omega} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}v$$
化为球坐标系下的逐次积分，下列结果正确的是（　　）.

   A. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho$

   B. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho)\,\mathrm{d}\rho$

   C. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho$

   D. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\,\mathrm{d}\rho$

3. 设 $\Omega:0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\Omega_1$ 为 Ω 在第一卦限的部分区域，则下面式子正确的是（　　）.

   A. $\iiint\limits_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v$　　**B.** $\iiint\limits_{\Omega_1} xy\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} x^2\,\mathrm{d}v$

   C. $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=0$　　**D.** $\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1} xy\,\mathrm{d}v$

4. 关于数项级数的敛散性，下面说法正确的是（　　）.

   A. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l<1$

   B. 若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\sum a_n^2$ 收敛

C. 若 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛，则 $\sum(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$，则 $\sum a_n$ 收敛

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，对于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 以下结论正确的是（　　）.

A. 在 $x=1$ 处条件收敛　　**B.** 在 $x=3$ 处发散

C. 在 $x=2$ 处绝对收敛　　**D.** 在 $x=0$ 处条件收敛

6. 在 xOy 面上，若积分

$$\int_L(2x\mathrm{e}^{x^2}y^3+ax\cos y)\,\mathrm{d}x+(b\mathrm{e}^{x^2}y^2-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y$$

与路径无关，则（　　）.

A. $a=2,\ b=-3$　　**B.** $a=-2,\ b=3$

C. $a=-2,\ b=-3$　　**D.** $a=2,\ b=3$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=$________________.

8. 设区域 $D:|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D(1-x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________________.

9. 设 $f(x)=x+1,\ -\pi\le x\le\pi$，将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅立叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则 $a_{2018}=$________________.

10. 设向量函数 $\boldsymbol{F}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{G}=(y,z,x)$，则 $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=$________________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x^2+y^2-5z=0\end{cases}$$

在点 $P(1,2,1)$ 处的切线方程.

12. 设 $u=f(x+y^2,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

13. 设 $x=r^2\cos\theta$, $y=r\sin\theta\ (r\neq 0)$ 确定的隐函数为 $r=r(x,y)$, $\theta=\theta(x,y)$，求 $\dfrac{\partial r}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$.

14. 求 $I=\displaystyle\int_L (x+y^2)\,\mathrm{d}s$，其中 L 是圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}\ (0\leq x\leq 1)$ 与 x 轴和 y 轴所围平面图形的整个边界.

15. 求 $I=\displaystyle\iint_S xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leq z\leq 1)$，取上侧.

16. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的和函数，并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$ 的和.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 已知函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6R^2\ (R>0)$ 的第一卦限部分上存在最大值. 求出该最大值点，并由此证明：对任意正实数 a,b,c，成立 $ab^2c^3\le\left(\dfrac{a+2b+3c}{6}\right)^6$.

18. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$、柱面 $x^2+y^2=2x$ 以及 xy 坐标面围成的空间区域. 求：

（1）Ω 的体积 V；

（2）Ω 表面上锥面块的面积 S.

5 分析证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 计算曲线积分 $I=\displaystyle\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为圆心，以 $R\ (R>0,\ R\ne1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，证明

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(x)}\,\mathrm{d}x\ge1.$$

CHAPTER 2

2017-2018 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.

   由题意可知 $f(x,0)=|x|$，因此

   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

   极限不存在，即 $f'_x(0,0)$ 不存在. 又 $f(0,y)\equiv 0$，所以

   $$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

   存在.

2. **Solution**. C.

   在球坐标下，$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$，且 $\mathrm{d}v=\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. 区域条件

   $$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$$

   化为

   $$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\qquad 0\le\rho\le\frac{1}{\cos\varphi},\qquad 0\le\theta\le 2\pi.$$

   因此 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}f(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}f(\rho)\rho^2\,\mathrm{d}\rho.$

3. **Solution**. A.

   Ω_1 是第一卦限中的单位球部分，关于 x,y,z 轮换对称，故

   $$\iiint\limits_{\Omega_1}x\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1}z\,\mathrm{d}v.$$

   而由对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v>0$，$\iiint\limits_{\Omega}xy\,\mathrm{d}v=0.$

4. **Solution**. C.

对于 A 选项，令 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，则 $\sum a_n$ 收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{2\ln n}{n}\right) = 1$.

对于 B 选项，令 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum a_n$ 收敛，但 $\sum a_n^2 = \dfrac{1}{n}$ 发散.

对于 C 选项，记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k}) = -S_{2n}.$$

因为 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛，所以其偶数项部分和 S_{2n} 收敛，从而 $\sum(a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

对于 D 选项，令 $a_n = (-1)^{n-1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -1 < 1$，但 $\sum a_n$ 发散.

5. **Solution**. B.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = 2$ 处收敛但不绝对收敛，因此收敛半径为 1.

当 $x = 3$ 时，$|x-1| = 2 > 1$，级数发散.

6. **Solution**. D.

记

$$P = 2xe^{x^2}y^3 + ax\cos y, \qquad Q = be^{x^2}y^2 - x^2\sin y.$$

积分与路径无关要求 $P_y = Q_x$，即

$$6xe^{x^2}y^2 - ax\sin y = 2bxe^{x^2}y^2 - 2x\sin y.$$

比较系数得 $b = 3$, $a = 2$.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y + 3\,\mathrm{d}z$.

因为

$$u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z,$$

所以

$$\mathrm{d}u\Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\,\mathrm{d}y + \frac{3}{z}\,\mathrm{d}z\Big|_{(1,1,1)} = \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y + 3\,\mathrm{d}z.$$

8. **Solution**. $\dfrac{7}{3}$.

区域 D 关于 y 轴对称，故 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. 又 D 的面积为 2，于是

$$\iint\limits_D (1-x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2 + \iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

而

$$\iint_D x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

故 $\iint\limits_D (1-x)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{7}{3}$.

9. **Solution**. 0.

当 $n \geq 1$ 时，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

其中 $x\cos nx$ 为奇函数，积分为 0；$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$，故 $a_{2018} = 0$.

10. **Solution**. $x+y+z$.

先算

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G} = (xy-z^2,\ yz-x^2,\ xz-y^2),$$

因而

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = y+z+x = x+y+z.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 两曲面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = (2x, 2y, 2z), \qquad \boldsymbol{n}_2 = (2x, 2y, -5).$$

在 $P(1,2,1)$ 处，

$$\boldsymbol{n}_1 = (2,4,2), \qquad \boldsymbol{n}_2 = (2,4,-5).$$

曲线切向量可取作

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2 = (-28,14,0) \sim (-2,1,0).$$

故切线方程为

$$\frac{x-1}{-2} = y-2 = \frac{z-1}{0}.$$

12. **Solution**. 先对 x 求偏导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + yf_2.$$

再对 y 求偏导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2yf_{11} + (x+2y^2)f_{12} + xyf_{22} + f_2.$$

其中 $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}$ 均在 $(x+y^2, xy)$ 处取值.

13. **Solution**. 对

$$x = r^2\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

两边关于 x 求偏导，得

$$\begin{cases} 1 = 2r\cos\theta\,\dfrac{\partial r}{\partial x} - r^2\sin\theta\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \\ 0 = \sin\theta\,\dfrac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x}. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{r(1+\cos^2\theta)}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r^2(1+\cos^2\theta)}.$$

14. **Solution**. L 由 x 轴线段、y 轴线段及第一象限单位圆弧组成. 在 x 轴上，

$$I_1 = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

在 y 轴上，

$$I_2 = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}.$$

在圆弧 $x=\cos t,\ y=\sin t\ \left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$，故

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{11}{6} + \frac{\pi}{4}.$$

15. **Solution**. 记 $\Omega: z=1, x^2+y^2\le 1$ 取下侧，则由 Gauss 定理，

$$\begin{aligned} I &= \oiint\limits_{S+\Omega} xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Omega} zx^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}v + \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

用球坐标代换得

$$\begin{aligned} I_1 &= -\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}v \\ &= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\rho^4\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^5\varphi}\,\mathrm{d}\cos\varphi = -\frac{\pi}{10}\frac{1}{\cos^4\varphi}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{3\pi}{10}; \end{aligned}$$

由对称性可知 $I_2 = \displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}.$

因此 $I = I_1 + I_2 = -\dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{20}.$

16. **Solution**. 注意到 $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, |x|<1$，对两边积分得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}, |x|<1.$$

当 $0<|x|<1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{\arctan x}{x}$; 当 $x=0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}=1.$

又注意到当 $|x|=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 也收敛，因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x}, & 0<|x|\le 1,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

取 $x=\frac{1}{2}$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}=2\arctan\frac{1}{2}.$$

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 用 Lagrange 乘数法，设 $L(x,y,z,\lambda)=\ln(xy^2z^3)-\lambda(x^2+2y^2+3z^2-6R^2), x,y,z>0.$

令 $\nabla L=0$，得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2\lambda x=0,\\ \dfrac{2}{y}-4\lambda y=0,\\ \dfrac{3}{z}-6\lambda z=0,\\ x^2+2y^2+3z^2=6R^2.\end{cases}$$

解得最大值点为 (R,R,R)，最大值为

$$\ln(R\cdot R^2\cdot R^3)=6\ln R.$$

对任意正实数 a,b,c，取

$$R^2=\frac{a+2b+3c}{6},\qquad x=\sqrt{a},\quad y=\sqrt{b},\quad z=\sqrt{c}.$$

则点 (x,y,z) 在椭球面上，故

$$\ln\sqrt{ab^2c^3}\le 6\ln R.$$

因而

$$ab^2c^3\le R^{12}=\left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^6.$$

18. **Solution**. 用柱坐标代换. 柱面 $x^2+y^2=2x$ 化为

$$r=2\cos\theta,\qquad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

区域为

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\qquad 0\le r\le 2\cos\theta,\qquad 0\le z\le r.$$

因而

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\,\mathrm{d}r\int_0^r\mathrm{d}z=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{9}.$$

锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的面积元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

其投影为圆盘 $x^2+y^2\le 2x$，故

$$S=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$

5 分析证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Solution**. 记

$$P=-\frac{y}{4x^2+y^2},\qquad Q=\frac{x}{4x^2+y^2}.$$

在不含原点的区域内，有

$$Q_x-P_y=0.$$

当 $0<R<1$ 时，圆周 L 内部不含奇点 $(0,0)$，由 Green 公式得

$$I=0.$$

当 $R>1$ 时，L 包围原点. 考虑充分小的 $\delta>0$，使得小椭圆 $E:4x^2+y^2=\delta^2$ 包含在 L 内部. 从而由复合闭路定理，

$$I=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\oint_E\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{\delta^2}.$$

由 Green 公式，$\oint_E x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=2\iint\limits_{4x^2+y^2\le\delta^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\delta^2$. 因此 $I=\pi$.

综上所述，

$$I=\begin{cases}0, & 0<R<1,\\ \pi, & R>1.\end{cases}$$

20. **Proof**. 记 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，$I=\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-f(x)}\,\mathrm{d}x$，则

$$I=\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-f(y)}\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由 D 的轮换对称性可知 $I=\iint\limits_D\mathrm{e}^{f(y)-f(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，因此

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\mathrm{e}^{f(y)-f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\frac{1}{\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\ge\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.\end{aligned}$$