CHAPTER 1

2019-2020 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\sin^2 n + 3\cos^2 n}$.

2. 当 $x \to 1$ 时，求 $\sqrt[3]{x} - 1$ 关于 $x - 1$ 的主部.

3. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x \ln\cos x}$.

4. 计算极限 $l = \lim\limits_{x \to 0} (\mathrm{e}^x - \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

5. 设 $f(x) = x^{\tan x}$. 求 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. 求曲线 $\cos x + \ln(y - x) = y^2$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

7. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，求 $y = f(\sin x)$ 的二阶导数.

8. 设 $y = x \ln x$，求 $y^{(6)}$.

9. 求 a,b 的值使得函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x<0,\\ b-\sin 2x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续并且可导.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=t+\ln t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$. 指出 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

12. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为 n 次实系数多项式. 证明当 n 为奇数时，方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

13. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，$f(2)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)}{f(2)}\right]^x$.

14. 设一个雪球以 2cm^3/min 的速度融化. 设雪球在融化过程中始终保持球形. 求当雪球半径为 10cm 的时候半径变化的速率.

15. 写出函数 $f(x) = x\cos x$ 带 Peano 余项的五阶 Maclaurin 公式.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = \sqrt{6}$，$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ 给出. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求极限值.

17. 设 $0 < a < b$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导. 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\xi f'(\xi) - f(\xi) = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}.$$

CHAPTER 2

2019-2020 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 显然 $\sqrt[n]{2} \le \sqrt[n]{2\sin^2 n + 3\cos^2 n} \le \sqrt[n]{3}$.
   由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\sin^2 n + 3\cos^2 n} = 1$.

2. **Solution**.
$$\sqrt[3]{x} - 1 = (1 + x - 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}(x-1).$$
   故主部为 $\dfrac{1}{3}(x-1)$.

3. **Solution**.
$$\begin{aligned} l =& \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{-\frac{1}{2}x^3} \\ =& -2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4. **Solution**.
$$\begin{aligned} l =& \lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x - \sin x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\mathrm{e}^x - \sin x\right)\right] \\ =& \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{\mathrm{e}^x - \sin x}\cdot\frac{1}{2x}\right) = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{2x}} \\ =& \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x + \sin x}{2}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

5. **Solution**. 因为 $\ln f(x) = \tan x \ln x$,
   所以
$$f'(x) = f(x)\cdot(\tan x\ln x)' = x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x + \frac{\tan x}{x}\right),$$
   代入 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 得 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + \dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{\pi}{4}$.

6. **Solution**. 方程两边对 x 求导得到
$$-\sin x + \frac{1}{y-x}(y'-1) = 2yy',$$
   代入 $x=0, y=1$ 解得 $y'(0) = -1$，所以切线方程为 $x + y = 1$.

7. **Solution**.

$$y' = f'(\sin x)\cos x,$$

$$y'' = f''(\sin x)\cos^2 x - f'(\sin x)\sin x.$$

8. **Solution**.

法一. 根据 Leibniz 法则得到

$$\begin{aligned} y^{(6)} &= x\,(\ln x)^{(6)} + 6\,(\ln x)^{(5)} \\ &= x\left(\frac{1}{x}\right)^{(5)} + 6\left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} \\ &= \frac{24}{x^5}. \end{aligned}$$

法二.

$$y^{(6)} = (1+\ln x)^{(5)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} = \frac{24}{x^5}.$$

9. **Solution**. $f\left(0^+\right) = b$，$f\left(0^-\right) = 1$，由连续性知 $b = 1$.

求导得到 $f'_+(0) = -2$，$f'_-(0) = a$，由导数存在知 $a = -2$.

10. **Solution**.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1+\frac{1}{t}}{2t+2} = \frac{1}{2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2t^2}\cdot\frac{1}{2t+2} = -\frac{1}{4t^2(t+1)}.$$

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**. 函数 $f(x)$ 的间断点为 $0, -1$. 因

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(-1^+) = -\frac{\pi \mathrm{e}}{2}, \quad f(-1^-) = \frac{\pi \mathrm{e}}{2},$$

所以 $x = 0$ 是无穷间断点，$x = -1$ 是跳跃间断点.

12. **Solution**. 当 n 为奇数时，显然有

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(-\infty) = -\infty.$$

于是存在 x_1, x_2 使得 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.

函数 $f(x)$ 显然连续，由介值定理知，存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_0) = 0$，

即方程 $f(x) = 0$ 至少有一个实根.

13. **Solution**.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)}{f(2)}\right]^x &= \exp\left[\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)}{f(2)}\right] \\
&= \exp\left[\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)-f(2)}{f(2)}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{f(2)}\lim_{x\to\infty} x\left[f\left(2+\frac{1}{x}\right)-f(2)\right]\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{f(2)}\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)-f(2)}{\frac{1}{x}}\right] \\
&= \exp\left[\frac{f'(2)}{f(2)}\right].
\end{aligned}$$

14. **Solution**. 根据几何关系得到

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

两边对 t 求导得到

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-2$ 以及 $r=10$ 解得 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{200\pi}$.

即半径以 $\dfrac{1}{200\pi}$cm/min 的速度减小.

15. **Solution**. 先写出

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4),$$

进而

$$f(x)=x\cos x=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5+o(x^5).$$

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**. 显然 $x_2>x_1$, 设 $x_{k+1}>x_k$, 由 $x_{k+2}^2-x_{k+1}^2=6+x_{k+1}-6-x_k=x_{k+1}-x_k>0$ 知 $x_{k+2}>x_{k+1}$.

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 严格单调增加.

另外显然 $x_1<3$，设 $x_k<3$，由 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}<\sqrt{9}=3$ 知 $x_{k+1}<3$.

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界 3. 根据单调有界收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$，对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限得到 $L=\sqrt{6+L}$，解得 $L=3$.

17. **Proof**. 显然函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 和 $G(x)=\dfrac{1}{x}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，

并且 $G(x)$ 的导数不为 0. 由 Cauchy 中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

两边变号即得所证.