
CHAPTER 1

2019-2020 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设 $0 < a_n < 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 则以下数列中无界的是 ().

A. $\{a_n^2\}$

B. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

C. $\left\{\tan \frac{\pi a_n}{2}\right\}$

D. $\{\ln a_n\}$

2. 已知 $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$, 则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h) - 9}{h} = ()$.

A. 30

B. 10

C. 6

D. 0

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则以下说法中错误的是 ().

A. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上有界

B. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上有连续的导数

C. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上连续

D. $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上可积

4. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 一共有 () 条渐近线.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

5. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, 则以下不等式中一定成立的是 ().

A. $f(1) + f(3) > 2f(2)$

B. $f(1) + f(3) < 2f(2)$

C. $f(1) + f(2) > 2f(3)$

D. $f(1) + f(2) < 2f(3)$

6. 微分方程 $y' - \frac{y}{2x} = 0$ 满足初值条件 $y(1) = 2$ 的特解为 ().

A. $2\sqrt{x}$

B. $1 + \sqrt{x}$

C. $1 + x$

D. $\sqrt{x+3}$

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) =$ _____.

8. 设函数 $y = x^2 - x$. 在 $x = 2$, $\Delta x = 0.01$ 时, 微分 $dy =$ _____.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} =$ _____.

10. 曲线 $y = 1 - x^4$ 与 x 轴所围成图形的面积为 _____.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $u = e^{3x} - ax^2 - (1 + bx) \cos x$ 是与 x^3 同阶的无穷小. 求常数 a, b 的值.

12. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

13. 求不定积分 $I = \int \frac{e^{5x}}{e^{2x} + 1} dx$.

14. 求定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

15. 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ 的敛散性, 若收敛求其值.

16. 求微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 满足初值条件 $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$ 的特解.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty), \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

18. 求曲线 $y = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3}$ 对应于 $1 \leq x \leq 4$ 弧段的长度.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 n 为正整数, 求方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 所有的实根. 证明你的结论.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导数. 证明:

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| + \int_a^b |f'(x)| \, dx, \quad x \in [a, b].$$

CHAPTER 2

2019-2020 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** C.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow 1$ 且 $0 < a_n < 1$, 所以 $\tan \frac{\pi a_n}{2} \rightarrow +\infty$, 数列 $\left\{ \tan \frac{\pi a_n}{2} \right\}$ 无界.

2. **Solution.** A.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h) - 9}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+h) - f^2(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(2+h) - f(2)][f(2+h) + f(2)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} [f(2+h) + f(2)] \\ &= 2f(2)f'(2) = 30.\end{aligned}$$

3. **Solution.** B.

$f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必然有界, 可导则说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 必然可积.

但可导不一定有连续的导数, 故 B 选项错误.

4. **Solution.** D.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 所以曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 有竖直渐近线 $x = 0$.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0,$$

所以曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 有斜渐近线 $y = x$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0,$$

所以曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 有水平渐近线 $y = 0$.

故曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线条数为 3.

5. **Solution.** B.

$f(x)$ 是上凸的, 所以 $\frac{f(1)+f(3)}{2} < f(2)$, 即 $f(1)+f(3) < 2f(2)$.

6. **Solution.** A.

方程变形为 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$, 两边积分得 $\ln y = \frac{1}{2} \ln x + \ln C$, 即 $y = C\sqrt{x}$.

将初值条件 $y(1) = 2$ 代入上式得 $C = 2$, 所以特解为 $y = 2\sqrt{x}$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $\frac{1}{4}$.

由定积分的定义,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \cdots + \frac{n^3}{n^3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^3 \\ &= \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

8. **Solution.** 0.03.

$$dy = y'(2)\Delta x = (2x - 1) \Big|_{x=2} \Delta x = 3\Delta x = 0.03.$$

9. **Solution.** $\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \sqrt{3+t^2} dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+\sin^4 x} \cdot 2 \sin x \cos x}{2x} \\ &= \sqrt{3} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

10. **Solution.** $\frac{8}{5}$.

$$\text{所围成图形的面积 } S = \int_{-1}^1 (1-x^4) dx = \frac{8}{5}.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 由 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} u &= e^{3x} - ax^2 - (1+bx) \cos x \\ &= \left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \right) - ax^2 - (1+bx) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right) \\ &= (3-b)x + (5-a)x^2 + \frac{9+b}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

因此必然有 $a = 5$, $b = 3$.

12. **Solution.** 计算 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, 令 $f'(x) = 0$ 得到函数在 $(-2, 2)$ 内的驻点为 $x = -1$.

比较

$$f(-2) = 3, \quad f(-1) = 10, \quad f(2) = -17,$$

所以函数在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 10, 最小值为 -17.

13. **Solution.** 令 $u = e^x$, 则 $du = e^x dx$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{4x} \cdot e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = \int \frac{u^4}{u^2 + 1} du \\ &= \int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2 + 1} \right) du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + \arctan u + C = \frac{e^{3x}}{3} - e^x + \arctan e^x + C. \end{aligned}$$

14. **Solution.**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \, d \tan x \\ &= x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

15. **Solution.** 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t \, dt$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\tan t \sqrt{\tan^2 t + 1}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc t \, dt = -\ln |\csc t + \cot t| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\ln(\sqrt{2} + 1) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \frac{1 + \cos t}{\sin t} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

所以反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ 发散.

16. **Solution.** 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$,

微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 变形为

$$p \, dp = \frac{\sin y}{\cos^3 y} \, dy.$$

方程两边积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}\sec^2 y + C_1$, 将初值条件 $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$ 代入上式得 $C_1 = 0$,

所以 $p = \sec y$, 即 $\frac{dy}{dx} = \sec y$ 或 $\cos y \, dy = dx$.

方程两边积分得 $x = \sin y + C_2$, 将初值条件 $y(2) = 0$ 代入上式得 $C_2 = 2$,

所以特解为 $x = \sin y + 2$ 或 $y = \arcsin(x - 2)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} = -\frac{1}{2} = f'(0). \end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续.

18. **Solution.** 因为 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$, 所以

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4x} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}} dx = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx.$$

故

$$s = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}.$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 显然 $x = 0$ 是方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 的一个实根.

令 $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 1$, 则 $f'(x) = 2n[(x+1)^{2n-1} - x^{2n-1}]$.

由于 t^{2n-1} 是严格单增函数, 所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单增.

因此方程 $(x+1)^{2n} = x^{2n} + 1$ 只有唯一实根 $x = 0$.

20. **Solution.** 根据积分中值定理, $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi) + f(x) - f(\xi) \leq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_{\xi}^x |f'(t)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(t)| dt. \end{aligned}$$