CHAPTER 1

2018-2019 学年微积分（一）（下）期中考试

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = \dfrac{1}{2}$ 的特解.

2. 设 $y = \mathrm{e}^x (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$ 为某二阶常系数齐次微分方程的通解，求此微分方程.

3. 已知点 $A = (3, -3, 1)$ 与点 $B(3, -2, 2)$ 满足 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$，求向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦.

4. 判断直线 $L_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$ 与直线 $L_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-6}{5}$ 是否共面.

5. 讨论二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x+y}$ 的存在性. 若极限存在求其值，若不存在说明理由.

6. 已知平面曲线由方程 $x^2 + y^3 + \ln(x+y) - 3 = 0$ 确定，求点 $x = 2, y = -1$ 处的法线方程.

7. 设 $\varphi(u,v)$ 有连续偏导数，方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x,y)$. 证明：$az_x + bz_y = c$.

8. 计算 $I=\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^2 \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x$.

9. 计算 $I=\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4,|x|\geq|y|\right\}$.

10. 计算 $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中区域 V 由曲面 $z=0,z=4-x^2-y^2$ 围成.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 求解微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}$.

12. 求函数 $u = 2x + y^2 z$ 在点 $(1, -1, -1)$ 处沿椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 的外法线方向的方向导数.

13. 求函数 $u = x + 3z$ 在曲线 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 上的最大值与最小值.

14. 求积分 $I = \iiint\limits_V x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$，其中区域 $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$.

15. 设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

（1）证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微；

（2）求 $f_{xy}(0,0)$.

CHAPTER 2

2018-2019 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，

   所以方程变形为 $yp\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$.

   显然 $p\neq 0$，故 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$，即 $y\,\mathrm{d}p+p\mathrm{d}y=\mathrm{d}(yp)=0$.

   两边积分，得 $yp=C_1$，将 $y(0)=1$，$y'(0)=p(0)=\dfrac{1}{2}$ 代入上式，得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，所以 $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}$，

   即 $y\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x$，两边积分，得 $\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{x}{2}+C_2$.

   将 $y(0)=1$ 代入上式，得 $C_2=\dfrac{1}{2}$，所以特解为 $y=\sqrt{x+1}$.

2. **Solution**. 由通解的形式可知特征方程的两个解为 $1\pm 2i$，所以特征方程为 $r^2-2r+5=0$，

   因此二阶常系数齐次微分方程为 $y''-2y'+5y=0$.

3. **Solution**. 设 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x-3,y+3,z-1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,1)$.

   因 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$，所以 $\begin{cases}x-3=0,\\ y+3=3,\\ z-1=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=0,\\ z=4.\end{cases}$

   故 $\overrightarrow{OM}=(3,0,4)$，其方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=\dfrac{4}{5}$.

4. **Solution**. 取 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(2,-1,3)$，$L_2$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(1,2,5)$，

   在 L_1 上取点 $A(-1,2,4)$，在 L_2 上取点 $B(1,-3,6)$，则 $\overrightarrow{AB}=(2,-5,2)$. 计算

   $\overrightarrow{AB}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix}2&-5&2\\2&-1&3\\1&2&5\end{vmatrix}=23\neq 0$，所以 L_1 与 L_2 不共面.

5. **Solution**. 因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{xy^2}{x+y} = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3-x}} \frac{xy^2}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^3-x)^2}{x+(x^3-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^7-2x^5+x^3}{x^3} = 1,$$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x+y}$ 不存在.

二重极限存在性问题，分母为 $x+y$，常设 $y=x^\alpha-x$ 来寻找不为 0 的极限值.

再考虑一例：证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$ 不存在.

Solution. 当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y} = 0$;

令 $y = x^\alpha - x$,

$$\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y} = \frac{x^{\alpha+3}-x^4+x^{\alpha+2}-x^3+x\left(x^\alpha-x\right)^4}{x^\alpha} = \frac{-x^3+o(x^3)}{x^\alpha},$$

令 $\alpha=3$，则 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3-x}} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y} = -1$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$ 不存在.

6. **Solution**. 设 $F(x,y) = x^2+y^3+\ln(x+y)-3$,

曲线在点 $(2,-1)$ 处的切线斜率 $k = -\dfrac{F_x(2,-1)}{F_y(2,-1)} = -\left.\dfrac{2x+\frac{1}{x+y}}{3y^2+\frac{1}{x+y}}\right|_{(2,-1)} = -\dfrac{5}{4}$，所以法线斜率为 $\dfrac{4}{5}$,

因此法线方程为 $y+1=\dfrac{4}{5}(x-2)$，即 $4x-5y-13=0$.

7. **Solution**. 方程 $\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 两边对 x 求偏导，得

$$\varphi_u(c-az_x)+\varphi_v(-bz_x)=0.$$

所以 $z_x = \dfrac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}$.

方程 $\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 两边对 y 求偏导，得

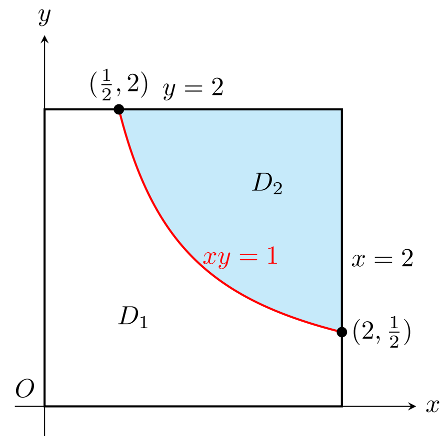
$$\varphi_u(-az_y)+\varphi_v(c-bz_y)=0.$$

所以 $z_y = \dfrac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$.

故 $az_x+bz_y = \dfrac{c(a\varphi_u+b\varphi_v)}{a\varphi_u+b\varphi_v} = c$.

8. **Solution**.

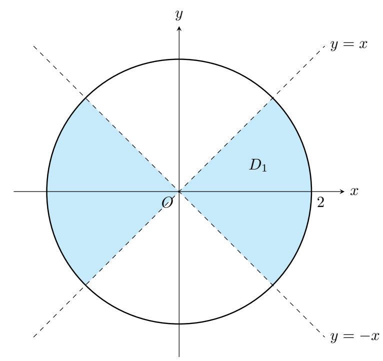
积分区域如图所示. 所以



$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 1 + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{2} xy\,\mathrm{d}y \\
&= 1 + \ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left(2 - \frac{1}{2x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= 1 + 2\ln 2 + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2x - \frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x = 1 + 2\ln 2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} \\
&= 1 + 2\ln 2 + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2.
\end{aligned}
$$

9. **Solution**.

积分区域如图所示. 所以



$$
\begin{aligned}
I &= 4\iint\limits_{D_1} \cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r\cos r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \pi \cdot \frac{1}{2}\sin r^2\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}\sin 4.
\end{aligned}
$$

10. **Solution**. 用柱坐标代换，抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 可表示为 $z=4-r^2$，所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{4-r^2} r\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^2 r\,\mathrm{d}r \int_0^{4-r^2} r\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^2 r^2(4-r^2)\,\mathrm{d}r = 2\pi\left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\right)\Big|_0^2 = \frac{128\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. 齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，解得 $\lambda=1,2$，

所以齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

分别求解非齐次项 e^{2x} 和 e^{3x} 对应的特解，

对于 $y_1=\mathrm{e}^{2x}$，$\lambda=2$ 是齐次方程的特征根，所以可设特解为 $y_1^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$，

将其代入 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}$，得 $4A\mathrm{e}^{2x}(1+x)-3A\mathrm{e}^{2x}(1+2x)+2Ax\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}$，

解得 $A=1$，所以 $y_1^*=x\mathrm{e}^{2x}$.

对于 $y_2=\mathrm{e}^{3x}$，$\lambda=3$ 不是齐次方程的特征根，所以可设特解为 $y_2^*=B\mathrm{e}^{3x}$，

将其代入 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{3x}$，得 $9B\mathrm{e}^{3x}-9B\mathrm{e}^{3x}+2B\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x}$，

解得 $B=\frac{1}{2}$，所以 $y_2^*=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$.

因此非齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$.

12. **Solution**. 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$，则 $\nabla F(1,-1,-1)=(2,-4,-6)$，

所以椭球面外法线方向的单位向量为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,-3)$.

因此函数 $u=2x+y^2z$ 在点 $(1,-1,-1)$ 处沿椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 的外法线方向的方向导数

$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\nabla u(1,-1,-1)\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,2,1)\cdot(1,-2,-3)=-\dfrac{5\sqrt{14}}{14}$.

13. **Solution**. 即在约束条件 $\begin{cases}x+2y-3z=2,\\ x^2+y^2=2\end{cases}$ 下，求 $x+3z$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法，设 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=x+3z+\lambda(x+2y-3z-2)+\mu\left(x^2+y^2-2\right)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=1+\lambda+2\mu x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2\lambda+2\mu y=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=3-3\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+2y-3z-2=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=x^2+y^2-2=0.\end{cases}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial z}=3-3\lambda=0$，故 $\lambda=1$，将其代入 $\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$，得 $\mu x+1=\mu y+1=0$.

所以 $x=y$，代入 $\dfrac{\partial L}{\partial \mu}=x^2+y^2-2=0$，得 $x=y=1$ 或 $x=y=-1$.

当 $x=y=1$ 时，$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+2y-3z-2=0$，解得 $z=\dfrac{1}{3}$，此时 $x+3z=2$；

当 $x=y=-1$ 时，$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+2y-3z-2=0$，解得 $z=-\dfrac{5}{3}$，此时 $x+3z=-6$.

因此函数 $u=x+3z$ 在曲线 $\begin{cases}x+2y-3z=2,\\ x^2+y^2=2\end{cases}$ 上的最大值为 2，最小值为 -6.

14. **Solution**. 用球坐标代换，球面 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 可表示为 $r\le 2\cos\varphi$，所以

$$\begin{aligned}I=\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\mathrm{d}r\\ &=\frac{32}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{32}{5}\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi-1\right)\cos^5\varphi\mathrm{d}\cos\varphi\\ &=\frac{32\pi}{5}\left(\frac{1}{8}\cos^8\varphi-\frac{1}{6}\cos^6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi}{15}.\end{aligned}$$

15. **Solution**.

（1）显然 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，

所以即判断极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

是否为 0. 因为

$$0 \le \left| \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{|x|\cdot|y|^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{|x|\cdot(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = |x|,$$

且当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$|x|\to 0$，由夹逼定理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$，

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

（2）因为 $f_x(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} = y$，

所以

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1.$$