CHAPTER 1

2018-2019 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = x^2$ 的解，则以下函数中也是该微分方程的解的是（　　）.

   A. $y_1 + y_2 + y_3$　　**B.** $\frac{3}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3$

   C. $y_1 - y_2$　　**D.** $2y_3$

2. 以下函数在原点可微的是（　　）.

   A. $z = x^2 + y^2$　　**B.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   C. $z = |x - y|$　　**D.** $z = \sqrt{|xy|}$

3. 设 $F(x, y) = 0$ 是一条平面光滑曲线，则以下说法中正确的是（　　）.

   A. (F_x, F_y) 是该曲线的切向量　　**B.** (F_y, F_x) 是该曲线的法向量

   C. $(-F_y, F_x)$ 是该曲线的切向量　　**D.** $(-F_x, F_y)$ 是该曲线的法向量

4. 设平面区域 D 由 $x^2 + y^2 \le 1$ 表示，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy + \cos x \sin y)\,\mathrm{d}\sigma =$（　　）.

   A. 0　　**B.** $4\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma$

   C. $4\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y\,\mathrm{d}\sigma$　　**D.** $4\iint\limits_{D_1} (xy + \cos x \sin y)\,\mathrm{d}\sigma$

5. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成，$I=\iiint\limits_{\Omega} f(z)\,\mathrm{d}v$，则以下表达式**错误**的是（　　）.

A. $I=\pi\int_0^1 zf(z)\,\mathrm{d}z$

B. $I=2\pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 f(z)\,\mathrm{d}z$

C. $I=\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 f(z)\,\mathrm{d}z$

D. $I=2\pi\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z\int_0^z r\,\mathrm{d}r$

6. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则以下说法中正确的是（　　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 微分方程 $y''+2y'+y=x+2$ 的通解为__________.

8. 设 $z=f(x^2+y^2,xy)$，其中 f 有连续偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

9. 设 $f(x,y,z)=x+y^3+z^5$，则 $\operatorname{div}\,\mathbf{grad} f=$__________.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n3^n}=$__________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求点 $A(1,2,3)$ 到直线 $L:\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$ 的距离.

12. 设方程组

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + \ln z + z^3 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

在包含点 $(0,0,1)$ 的一个邻域上确定隐函数 $y = y(x), z = z(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

13. 求函数 $f(x,y) = 4x + 2xy - x^2 - 3y^2$ 的极值.

14. 求 $I = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

15. 求曲线积分 $I = \int_L (2xy - y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 2y\sin x)\,\mathrm{d}y$，其中曲线 L 沿抛物线 $y = \pi x - x^2 + 1$ 从 $A(0,1)$ 到 $B(\pi,1)$.

16. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 的敛散性，若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛，并说明理由.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 求曲面 $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 2$ 的面积.

18. 计算曲面积分 $I = \oiint\limits_S 3xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 L 是圆周曲线 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$（取正向），$f(x)$ 为正值连续函数. 证明:

$$\oint_L xf(y)\,\mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x \ge 2\pi.$$

20. 证明：当 $-\pi < x < \pi$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} = \frac{x}{2}$.

CHAPTER 2

2018-2019 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. B.

   对于非齐次方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ 的解 y_1, y_2, y_3，

   其线性组合 $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$ 也是该方程的解当且仅当

   $$c_1 + c_2 + c_3 = 1,$$

   四个选项中只有 B 满足

   $$\frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 1.$$

2. **Solution**. A.

   对于 A 选项，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{z(x,y) - z(0,0) - z_x(0,0)x - z_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$,

   因此 $z = x^2 + y^2$ 在原点可微.

   对于 B 选项，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{z(x,y) - z(0,0) - z_x(0,0)x - z_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$,

   因此 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 在原点不可微.

   对于 C 选项，由于 $z(x,0) = |x|$，显然 $z_x(0,0)$ 不存在，更不可微.

   对于 D 选项，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{z(x,y) - z(0,0) - z_x(0,0)x - z_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

   考察路径 $y = x$，$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$；再考察路径 $y = 0$，上述极限值为 0，

   因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在，$z = \sqrt{|xy|}$ 在原点不可微.

3. **Solution**. C.

   切向量可取作 $\left(1, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$，而由隐函数定理可知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F_x}{F_y}$,

   因此切向量为 $\left(1, -\dfrac{F_x}{F_y}\right)$，亦可取 $(-F_y, F_x)$. C 选项正确.

4. **Solution**. A.

已知区域 $D: x^2+y^2\le 1$ 关于 x 轴、y 轴均对称.

由于函数 xy 关于 x 或 y 都是奇函数，而 $\cos x\sin y$ 关于 y 是奇函数，所以

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = 0, \qquad \iint_D \cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

因此原积分为 0.

5. **Solution**. D.

由柱坐标可知

$$0\le r\le 1, \qquad r^2\le z\le 1,$$

故

$$I = 2\pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 f(z)\,\mathrm{d}z.$$

若先对 z 积分，则 $0\le z\le 1,\ 0\le r\le\sqrt{z}$，所以

$$I = 2\pi\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{z}} r\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^1 zf(z)\,\mathrm{d}z.$$

因此 A、B 正确，C 是直角坐标写法，也正确；D 中上限应为 $\sqrt{z}$，故错误.

6. **Solution**. B.

对于 A、C 选项，令 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\sum a_n^2$ 收敛，但 $\sum|a_n|$ 与 $\sum a_n$ 均发散.

对于 B 选项，$|a_na_{n+1}|\le\dfrac{a_n^2+a_{n+1}^2}{2}$，由比较判别法可知 $\sum a_na_{n+1}$ 绝对收敛.

对于 D 选项，令 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，则 $\sum a_n^2=\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\sum(-1)^na_n=\sum\dfrac{1}{n}$ 发散.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+x$.

方程对应的齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+1=(r+1)^2=0,$$

故齐次解为 $(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$. 由于 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以可设特解为 $y^*=ax+b$，代入得

$$ax+b+2a=x+2,$$

所以 $a=1,\ b=0$.

8. **Solution**. $2xf_1+yf_2$.

记

$$u=x^2+y^2, \qquad v=xy,$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1u_x+f_2v_x=2xf_1+yf_2.$$

9. **Solution**. $6y+20z^3$.

 因为
$$\operatorname{div}\mathbf{grad}\,f=\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz},$$
 而
$$f_{xx}=0,\qquad f_{yy}=6y,\qquad f_{zz}=20z^3,$$
 所以
$$\operatorname{div}\mathbf{grad}\,f=6y+20z^3.$$

10. **Solution**. $\ln 3$.

 由
$$-\ln(1-t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\qquad(|t|<1),$$
 取 $t=\dfrac{2}{3}$，得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}=-\ln\left(1-\frac{2}{3}\right)=\ln 3.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 取直线 L 上一点 $B(6,1,6)$，则 $\overrightarrow{AB}=\{5,-1,3\}$，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{-1,1,-2\}$.

 因此所求距离
$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{|\{-1,7,4\}|}{\sqrt{6}}=\sqrt{11}.$$

12. **Solution**. 方程组对 x 求导，得
$$\begin{cases}2x-2+2yy'+\dfrac{z'}{z}+3z^2z'=0,\\ 1+y'+z'=0.\end{cases}$$
 代入点 $(0,0,1)$ 得到
$$\begin{cases}-2+4z'(0)=0,\\ 1+y'(0)+z'(0)=0.\end{cases}$$
 解得
$$y'(0)=-\frac{3}{2},\qquad z'(0)=\frac{1}{2}.$$

13. **Solution**. 令
$$\begin{cases}f_x=4+2y-2x=0,\\ f_y=2x-6y=0.\end{cases}$$
 解得唯一驻点 $(3,1)$. 又
$$f_{xx}=-2,\quad f_{yy}=-6,\quad f_{xy}=2,\quad \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=8>0,$$
 故 $f(x,y)$ 在 $(3,1)$ 处取得极大值
$$f(3,1)=6.$$

14. **Solution**. 由轮换对称性可得

$$I = 3 \iiint\limits_{\Omega} z \, \mathrm{d}v.$$

用截面法，对于固定的 z，截面是底边为 $(1-z)$ 的等腰直角三角形，面积为 $\dfrac{(1-z)^2}{2}$，因此

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_0^1 z \cdot \frac{(1-z)^2}{2} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 z(1-z)^2 \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2!}{4!} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

15. **Solution**. 设

$$P = 2xy - y^2 \cos x, \qquad Q = x^2 - 2y \sin x,$$

则

$$P_y = Q_x = 2x - 2y \cos x,$$

所以积分与路径无关，且

$$\left(2xy - y^2 \cos x\right) \, \mathrm{d}x + \left(x^2 - 2y \sin x\right) \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2 y - y^2 \sin x).$$

所以

$$I = \left(x^2 y - y^2 \sin x\right) \Big|_{(0,1)}^{(\pi,1)} = \pi^2.$$

16. **Solution**. 对正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)!!}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)!!}$$

分别用比值判别法，

因 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1$，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)!!}$ 收敛；

因 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n+1} = 0 < 1$，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n-1)!!}$ 收敛.

因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 绝对收敛.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 曲面面积元

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 2$，故

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1 + 4r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{6} \left(1 + 4r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.$$

18. **Solution**. 由 Gauss 公式，

$$I = \iiint\limits_{\Omega} 2z \, \mathrm{d}v.$$

用球坐标代换，可得

$$I = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, \mathrm{d}\rho = \pi.$$

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由 Green 公式，得

$$\oint\limits_L x f(y) \, \mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \iint\limits_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

由区域 $D : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ 的轮换对称性，得

$$\iint\limits_D f(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

又因 $f(x) > 0$，有

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2.$$

从而

$$\begin{aligned} \oint\limits_L x f(y) \, \mathrm{d}y - \frac{y}{f(x)} \, \mathrm{d}x &= \iint\limits_D \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &\geq 2 \iint\limits_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2\pi. \end{aligned}$$

20. **Proof**. 将函数 $f(x) = \dfrac{x}{2}$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上作 2π 周期延拓并展开为傅立叶级数. 由奇偶性知 $a_n = 0$，而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin nx \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} x \, \mathrm{d} \cos nx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

因此其正弦级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n},$$

由 Dirichlet 收敛定理可得当 $-\pi < x < \pi$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} = \frac{x}{2}.$$