CHAPTER 1

2021-2022 学年微积分（一）（上）期中考试

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\ (a,b,c>0)$.

2. 求当 $x\to0^+$ 时，无穷小量 $\sqrt{1+x\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{2x}$ 的主部和阶数.

3. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{3+\cos x}{4}\right)^x-1\right]$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b\right)=0$，求 a,b.

5. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$.

6. 确定 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{|x|}{\tan x}}$ 的间断点及其类型.

7. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t+\mathrm{e}^t, \\ y=\sin t \end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

8. 设 $y=x^{x^x}$，求 y'.

9. 求 $y = x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

10. 设 $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)}$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 设 $x=\varphi(y)$ 是 $f(x)=\ln x+\arctan x$ 的反函数，求 $\varphi'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

12. 设曲线 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}+\ln\dfrac{y}{x+1}=2$ 确定，求曲线在 $x=0$ 处的切线方程.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$.

14. 有一长度为 5m 的梯子贴靠在铅直的墙上，假设其下端沿地板离开墙角而滑动. 当梯子下端离开墙角 3m 时，已知梯子的下端离开墙角滑动速率为 2.2m/s，问此时梯子的上端向下滑的速率为多少?

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=3+\dfrac{4}{x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$c\in(0,1)$. 证明：$\exists\xi,\eta\in[0,1]$，使得

$$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi).$$

CHAPTER 2

2021-2022 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 令 $A=\max\{a,b,c\}$，则

$$\frac{1}{3}A^n \le \frac{a^n+b^n+c^n}{3} \le A^n, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{3}}A \le \left(\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \le A.$$

由夹逼准则知，原式 $=A=\max\{a,b,c\}$.

2. **Solution**.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{2x} = \left(\sqrt{1+x\sqrt{x}}-1\right)-\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)(x\to 0^+) \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x}+o(x)-(2x+o(x)) \\ &= -2x+o(x)\sim -2x(x\to 0^+). \end{aligned}$$

故主部为 $-2x$，阶数为 1.

3. **Solution**.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{3+\cos x}{4}}-1}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{3+\cos x}{4}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3+\cos x}{4}-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. **Solution**. 要使 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b\right)=0$ 成立，必须

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2+4x-1}}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0,$$

从而得

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned}
b=&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1}-\sqrt{2}x\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}x\left[\sqrt{1+\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)}-1\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)=\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

5. **Solution**. $l=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}\right]$.

   而

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\\
&=\lim_{x\to}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-1-x}{2x}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

   所以 $l=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

6. **Solution**. $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi$，$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，理由如下：

   $x=0$ 是跳跃间断点. 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{|x|}{\tan x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\tan x}\right)=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0^-}\exp\left(\frac{|x|}{\tan x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\tan x}\right)=\mathrm{e}^{-1}.$$

   $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是无穷间断点. 因为

$$\lim_{x\to k\pi^+}\exp\left(\frac{|x|}{\tan x}\right)=\mathrm{e}^{+\infty}=+\infty.$$

   $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是可去间断点. 因为

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\exp\left(\frac{|x|}{\tan x}\right)=\mathrm{e}^0=1.$$

7. **Solution**. 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{-\sin t\left(1+\mathrm{e}^t\right)-\cos t\cdot\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}}{1+\mathrm{e}^t}=\frac{-\sin t\left(1+\mathrm{e}^t\right)-\cos t\cdot\mathrm{e}^t}{\left(1+\mathrm{e}^t\right)^3},$$

   所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=-\frac{1}{8}.$$

8. **Solution**. 因 $(x^x)'=\left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)'=x^x(1+\ln x)$，又

$$\ln y=x^x\ln x,$$

所以 $\dfrac{1}{y}y' = (x^x \ln x)' = x^x(1+\ln x)\ln x + x^{x-1}$，即

$$y' = x^{x^x} x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right).$$

9. **Solution**. 取 $v(x) = x^2$，它的三阶以上的导数为 0，

$$u^{(k)}(x) = [\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1, 2, \cdots,$$

由 Leibniz 公式 $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$，得

$$y^{(n)} = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

所以

$$y^{(n)}(0) = (-1)^{n-3} n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^n n!}{n-2}(n > 2).$$

而 $y'(0) = y''(0) = 0$.

10. **Solution**. 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} = -\frac{x \sin x + 2\cos x}{x^3}.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)} = \frac{-\frac{x \sin x + 2\cos x}{x^3}\,\mathrm{d}x}{-\sin x\,\mathrm{d}x} = \frac{x + 2\cot x}{x^3}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)} = \frac{-\frac{x \sin x + 2\cos x}{x^3}\,\mathrm{d}x}{3x^2\,\mathrm{d}x} = -\frac{x \sin x + 2\cos x}{3x^5}.$$

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**. 当 $x = 1$ 时，$y = f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

而

$$f'(x) = (\ln x + \arctan x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2},$$

所以 $f'(1) = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$，故

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{3}.$$

12. **Solution**. 原方程变为

$$\mathrm{e}^{xy}(y + xy') + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x+1} = 0,$$

将 $x = 0, y = \mathrm{e}$ 代入，得 $\mathrm{e} + \dfrac{y'(0)}{\mathrm{e}} = 1$，故 $y'(0) = \mathrm{e}(1-\mathrm{e})$.

所以切线方程为 $y = \mathrm{e}(1-\mathrm{e})x + \mathrm{e}$.

13. **Solution**. $y'(x)=2f(x)f'(x)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]\\&=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)\\&=-2.\end{aligned}$$

14. **Solution**. 设梯子上端离墙角距离为 $s(m)$，下端离开墙角的距离为 $x(m)$，有一长度为

$$s=\sqrt{5^2-x^2}.$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

当 $x=3\mathrm{m}$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2.2\mathrm{m/s}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{3}{4}\cdot2.2=-1.65\mathrm{m/s}$.

即梯子上端向下滑的速率为 1.65m/s.

15. **Solution**. 因 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$,

且 $x\neq0$ 时，$f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$，所以

$$f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $x\neq0$ 时，初等函数 $f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$ 有定义，所以连续；

而 $\lim\limits_{x\to0}\left(2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**.

法一. 由题设知 $n>1$ 时，$x_n>3$；$n>2$ 时，$x_n<3+\dfrac{4}{3}$，即 $\{x_n\}$ 有界.

由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{4}{x_n}-\dfrac{4}{x_{n-1}}=\dfrac{4(x_{n-1}-x_n)}{x_nx_{n-1}}$ 知不能确定 $\{x_n\}$ 的单调性，但由

$$x_{n+1}-x_{n-1}=\frac{4}{x_n}-\frac{4}{x_{n-2}}=\frac{4(x_{n-2}-x_n)}{x_nx_{n-2}}=\frac{16(x_{n-1}-x_{n-3})}{x_nx_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}}$$

知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均分别单调.

由单调有界原理知奇子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2k}\}$ 均收敛.

设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=l_1$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=l_2$,

在

$$x_{2k+1}=3+\frac{4}{x_{2k}},\quad x_{2k}=3+\frac{4}{x_{2k-1}}$$

两边取极限，得 $l_1=3+\dfrac{4}{l_2}$ 以及 $l_2=3+\dfrac{4}{l_1}$，解得 $l_1=l_2=4$.

因此数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$.

法二. 常数 $l = 4$ 满足 $l = 3 + \frac{4}{l}$. 下证数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

$$\begin{aligned} 0 \leq |x_{n+1} - l| &= \left|\left(3 + \frac{4}{x_n}\right) - 4\right| = \frac{|x_n - 4|}{x_n} \\ &\leq \frac{1}{3}|x_n - 4| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{3^{n-1}}|x_2 - 4|. \end{aligned}$$

由迫敛性知 $|x_n - l|$ 收敛到 0，故数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限.

17. **Proof**. 构造函数 $F(x) = x^2 f(1) + (c^2 - 1)f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导.

由 Lagrange 中值定理，$\exists \eta \in (0,1)$，使得

$$F(1) - F(0) = F'(\eta),$$

即 $2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = (1 - c^2)f(0) + c^2 f(1)$，

因 $(1 - c^2)f(0) + c^2 f(1)$ 是 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的加权平均值，由介值定理知，$\exists \xi \in [0,1]$，使得

$$f(\xi) = (1 - c^2)f(0) + c^2 f(1),$$

故 $\exists \xi, \eta \in [0,1]$，使得

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi).$$