CHAPTER 1

2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 是一数列，则下列命题正确的是（　　）.

   A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　**B.** 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

   C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　**D.** 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+2}{x^n+1}$ 的间断点及类型是（　　）.

   A. $x=-1$ 是第二类间断点　　**B.** $x=1$ 是第二类间断点

   C. $x=\pm1$ 均是第一类间断点　　**D.** $x=\pm1$ 均是第二类间断点

3. $x\to0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）.

   A. $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　**B.** $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

   C. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　**D.** $1-\cos\sqrt{x}$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　　）.

   A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

   B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

   C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

   D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

5. 曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线条数为（　　）.

A. 0 **B.** 1

C. 2 **D.** 3

6. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$，则 $F(x)$（　　）.

A. 为正常数 **B.** 为负常数

C. 恒为 0 **D.** 不为常数

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 曲线 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 对应于 $t=1$ 处的法线方程为 = ________________.

8. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<2\pi\right)$ 的拐点是 ________________.

9. 曲线 $y=\ln\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为 ________________.

10. $y=2^x$ 的 Maclaurin 展开式中 x^n 项的系数为 ________________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\frac{ax^2+x-3}{x-1}=b$，求常数 a,b 的值.

12. 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=x^2-x\cdot f(2)+2\int_0^1 f(x)\,dx$，求 $f(x)$.

13. 求极限 $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{n+i}$.

14. 计算定积分 $I = \displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ $(\lambda > 0)$，计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.

16. 求微分方程 $xy' + y - \mathrm{e}^x = 0$，$y(2) = 1$ 的特解.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $f^{(n)}(0)$ 的值（$n\geq 2$）.

18. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leq x\leq 1$ 时，$y\geq 0$，又该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴围成平面图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$，求 a,b,c 的值，使得该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-2021$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内只有两个不同的实根.

20. 设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $|f''(x)|\leq M$，$f(1)=0$. 证明:

$$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{M}{3}.$$

CHAPTER 2

2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. B.

   考虑函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$，它在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调不减且有界，取数列 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，则 $x_n\to 0$，

   但当 n 为偶数时，$f(x_n)=1$；当 n 为奇数时，$f(x_n)=0$，所以 $\{f(x_n)\}$ 发散，A 选项错误.

   若 $\{x_n\}$ 单调，由于 $f(x)$ 单调有界，所以 $\{f(x_n)\}$ 亦单调有界，必收敛，B 选项正确.

   考虑函数 $f(x)\equiv 0$，它在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调不减且有界，取数列 $x_n=n$，则 $\{x_n\}$ 发散，

   但 $\{f(x_n)\}\equiv 0$ 单调不减且收敛，故 C，D 选项错误.

2. **Solution**. C.

   当 $|x|>1$ 时，$x^n\to\infty$，所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+2}{x^n+1}=1$；

   当 $|x|<1$ 时，$x^n\to 0$，所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+2}{x^n+1}=2$；

   当 $x=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2}{1+1}=\dfrac{3}{2}$；

   当 $x=-1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+2}{(-1)^n+1}$ 不存在.

   所以

   $$f(x)=\begin{cases}1, & |x|>1,\\ 2, & |x|<1,\\ \dfrac{3}{2}, & x=1,\\ \text{不存在}, & x=-1\end{cases},$$

   因此 $x=\pm 1$ 均为 $f(x)$ 的跳跃间断点，即第一类间断点.

3. **Solution**. C.

当 $x \to 0^+$ 时，

$$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = -\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1\right) \sim -\sqrt{x},$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 = \left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x)-\ln\left(1-\sqrt{x}\right) \sim x+\sqrt{x} \sim \sqrt{x},$$

$$1-\cos\sqrt{x} = 1-\left(1-\frac{1}{2}x+o(x)\right) \sim \frac{1}{2}x.$$

4. **Solution**. D.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$，A 选项正确.

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$ 存在，C 选项正确.

同理，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+f(-x))=2f(0)=0$，B 选项正确.

对于 D 选项，考虑 $f(x)=|x|$，则

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)-(-x)}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x}{x}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$ 存在，但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

5. **Solution**. B.

当 $x \to 0^+$ 时，

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)}{t}=0,$$

所以曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ 没有竖直渐近线.

当 $x\to+\infty$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)}{x}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)-1}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

所以曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ 有斜渐近线 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

综上，曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ 的渐近线条数为 1.

6. **Solution**. A.

因被积函数 $\mathrm{e}^{\sin t}\sin t$ 是周期为 2π 的函数，所以 $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$ 恒为常数.

计算

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t.$$

对第二项作代换 $u=2\pi-t$，则

$$\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_\pi^{0}\mathrm{e}^{\sin(2\pi-u)}\sin(2\pi-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\sin u}\sin u\,\mathrm{d}u.$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t} \sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^{\sin t} - \mathrm{e}^{-\sin t}\right) \sin t \,\mathrm{d}t.$$

因为在 $(0,\pi)$ 上，$\sin t > 0$，且 $\mathrm{e}^{\sin t} > \mathrm{e}^{-\sin t}$，故

$$\int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^{\sin t} - \mathrm{e}^{-\sin t}\right) \sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t} \sin t \,\mathrm{d}t > 0.$$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $y + x - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0$.

当 $t = 1$ 时，$x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，$y = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{2t}{2(1+t^2)}}{\frac{1}{1+t^2}} = t,$$

所以 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1} = 1$. 切线斜率为 1，故法线斜率为 -1，法线方程为 $y - \frac{1}{2}\ln 2 = -1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$，即

$$y + x - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0.$$

8. **Solution**. $(\pi, -2)$.

计算

$$y' = \sin x + x\cos x - 2\sin x, \quad y'' = \cos x + \cos x - x\sin x - 2\cos x = -x\sin x,$$

在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ 内，令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pi$.

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0,\pi)$ 时，$y'' \le 0$，y'' 在 $x = 0$ 两侧不变号，故 $x = 0$ 不是拐点；

当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时，$y'' > 0$，y'' 在 $x = \pi$ 两侧变号.

故曲线的拐点为 $(\pi, -2)$.

9. **Solution**. $\frac{1}{2}\ln 3$.

因为 $y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$，所以 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \sec x\,\mathrm{d}x$，

故

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

10. **Solution**. $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

因为 $y = 2^x = \mathrm{e}^{x\ln 2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln 2)^n}{n!}$，所以 x^n 项的系数为 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 由题可知 $\lim\limits_{x\to1}\left(ax^2+x-3\right)=a+1-3=0$，所以 $a=2$.

$b=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}=5.$

12. **Solution**. 记 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=C$.

令 $x=2$，得 $f(2)=4-2f(2)+2C$，所以 $f(2)=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}C$.

方程 $f(x)=x^2-x\cdot f(2)+2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 两边从 0 积分到 1 得

$$\begin{aligned}C&=\int_0^1\left(x^2-x\cdot f(2)+2C\right)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}f(2)+2C=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}C\right)+2C\\&=\frac{5}{3}C-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

解得 $C=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，所以

$$f(x)=x^2-x\cdot f(2)+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=x^2-\frac{5}{3}x+1.$$

13. **Solution**. 由定积分的定义，

$$\begin{aligned}l&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2.\end{aligned}$$

14. **Solution**. 令 $x=\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，

$$\begin{aligned}I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

15. **Solution**.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{0}xf(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\lambda x}\\&=-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

16. **Solution**. 方程变形为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$. 由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(C + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(C + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{x}\left(C + \mathrm{e}^x\right). \end{aligned}$$

将初始条件 $y(2) = 1$ 代入上式得 $C = 2 - \mathrm{e}^2$，所以特解为 $y = \frac{1}{x}\left(2 - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^x\right)$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 由于 $f(x)$ 连续，所以其积分变上限函数 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导，

从而方程 $f(x) = (x+1)^2 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 两边可导. 两边求导得 $f'(x) - 2f(x) = 2(x+1)$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int(-2)\,\mathrm{d}x}\left(C + \int 2(x+1)\mathrm{e}^{\int(-2)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left(C + 2\int (x+1)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{2x}\left[C + 2\int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left[C + 2\int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-2x}\right] = \mathrm{e}^{2x}\left[C - \int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2x}\right] \\ &= \mathrm{e}^{2x}\left[C - x\mathrm{e}^{-2x} + \int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-2x}\right] = \mathrm{e}^{2x}\left[C - x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right] \\ &= C\mathrm{e}^{2x} - x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

方程 $f(x) = (x+1)^2 + 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 两边令 $x = 0$ 得 $f(0) = 1$，

所以 $C = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$，$f(x) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x} - x - \frac{3}{2}$. 当 $n \geq 2$ 时，

$$f^{(n)}(0) = \left(\frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=0} = 5\cdot 2^{n-1}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{x=0} = 5\cdot 2^{n-1}.$$

18. **Solution**. 由抛物线过原点得 $c = 0$，且有

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 \left(ax^2 + bx\right)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{b}{2},$$

即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$. 旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \left(ax^2 + bx\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x^2(ax+b)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^1 (a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{a^2}{5}x^5 + \frac{ab}{2}x^4 + \frac{b^2}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \pi\left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3}\right) = \pi\left[\frac{a^2}{5} + \frac{a(1-a)}{3} + \frac{4(1-a)^2}{27}\right]. \end{aligned}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = \pi\left[\dfrac{2}{5}a + \dfrac{1-2a}{3} - \dfrac{8(1-a)}{27}\right] = 0$ 解得 $a = -\dfrac{5}{4}$，又

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27}\right) = \frac{4\pi}{135} > 0,$$

所以当 $a = -\dfrac{5}{4}$，$b = \dfrac{3}{2}$，$c = 0$ 时，旋转体体积 V 最小.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 令 $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{\mathrm{e}} + 2021$，则 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(x)$ 具有唯一驻点 $x = \mathrm{e}$，

且 $f(x)$ 在 $(0, \mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e}, +\infty)$ 上单调递减.

因 $f(0^+) = -\infty < 0$，$f(\mathrm{e}) = 2021 > 0$，$f(+\infty) = -\infty < 0$，

由介值定理和 $f(x)$ 的单调性易知方程 $\ln x = \dfrac{x}{\mathrm{e}} - 2021$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内只有两个不同的实根.

20. **Solution**. 由 Taylor 公式，将 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处展开得

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 = f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2,$$

其中 ξ 介于 1 和 x 之间. 所以

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^2 \left[f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2\right]\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^2 |f''(\xi)|(x-1)^2\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{M}{2}\int_0^2 (x-1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{M}{3}.\end{aligned}$$