CHAPTER 1

2020-2021 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求 $xy' - y = x^2 \cos x$ 的通解.

2. 求微分方程 $y'' - xy'^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = -2$ 的特解.

3. 计算顶点为 $A(1,1,1)$，$B(2,2,2)$，$C(1,2,2)$，$D(0,1,2)$ 的四面体 $ABCD$ 的体积.

4. 设函数 f 有二阶连续偏导数，$z = yf\left(x, x^2 y\right)$，计算混合偏导 z_{xy}.

5. 设 $w = x^2 yz$，$z = x^2 + y^2$，$x + y + z = 4$，求 $x = 1$，$y = 1$ 时导数 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ 的值.

6. 求 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 在 $(1,1,1)$ 处沿曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 的外法线方向的方向导数.

7. 交换二次积分 $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{1+y^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 的积分次序.

8. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的空间区域.

9. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域.

10. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的面积 S.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足积分方程 $f(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$，试求 $f(x)$.

12. 设 S 是曲线 $L:\begin{cases} z=1-x^2, \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面，求 S 的切平面，使其与已知平面 $x+y+z=1$ 平行.

13. 已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+2y^2-z=6, \\ 4x+2y+z=30 \end{cases}$，求 C 上的点到 xOy 坐标面的距离的最大值.

14. 计算 $I=\iint\limits_D \left(y\mathrm{e}^x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由心形线 $r=a\,(1+\cos\theta)\,(a>0)$ 围成的区域.

15. 讨论 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性与可微性.

CHAPTER 2

2020-2021 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 方程变形为 $y' - \dfrac{1}{x}y = x\cos x$，

   由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left(C + \int (x\cos x)\,\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= x\left[C + \int (x\cos x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right] = x\left(C + \int \cos x\,\mathrm{d}x\right) = x(C + \sin x) \\
&= Cx + x\sin x.
\end{aligned}
$$

2. **Solution**. 令 $y' = p$，则方程变形为 $p' - xp^2 = 0$，分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p^2} = x\,\mathrm{d}x$.

   两边积分，得 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = -\frac{1}{p} = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1$.

   将 $y'(0) = p(0) = -2$ 代入上式，得 $\dfrac{1}{2} = C_1$，所以 $p = -\dfrac{1}{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{x^2+1}$.

   因此 $\displaystyle\int p\mathrm{d}x = y = \int -\frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -2\arctan x + C_2$.

   将 $y(0) = 1$ 代入上式，得 $C_2 = 1$，所以特解为 $y = -2\arctan x + 1$.

3. **Solution**. $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$，$\overrightarrow{AC} = (0,1,1)$，$\overrightarrow{AD} = (-1,0,1)$，故

   $V = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \dfrac{1}{6}.$

4. **Solution**.

$$
z_x = y\left(f_1 + f_2\cdot 2xy\right) = y\left(f_1 + 2xyf_2\right),
$$

$$
z_{xy} = f_1 + 2xyf_2 + y\left[x^2f_{12} + 2x\left(f_2 + yf_{22}\cdot x^2\right)\right] = f_1 + 4xyf_2 + x^2yf_{12} + 2x^3y^2f_{22}.
$$

5. **Solution**. 设 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$，$G(x,y,z) = x + y + z - 4$.

因 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{((1,1,2))} = \left.\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right|_{((1,1,2))} = (2y+1)|_{(1,1,2)} = 3 \neq 0$，

所以方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y=y(x), z=z(x)$.

方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0, \\ G(x,y,z)=x+y+z-4=0 \end{cases}$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0. \end{cases}$$

将 $x=1$，$y=1$ 代入上式，得 $\begin{cases} 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0. \end{cases}$

所以

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=2xyz+x^2z\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2y\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=4+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2.$$

6. **Solution**. 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$，则 $\nabla F=(2x,2y,2z)$，

故可以取曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 $(1,1,1)$ 处的单位外法线 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

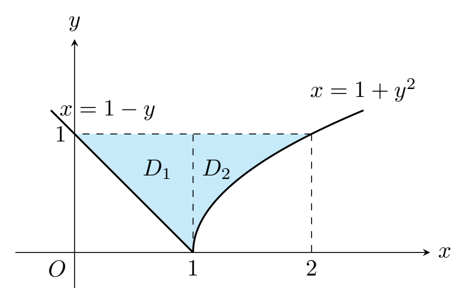
又 $\nabla u|_{(1,1,1)}=(2x,4y,6z)|_{(1,1,1)}=(2,4,6)$，

所以 u 在 $(1,1,1)$ 处沿曲面 $x^2+y^2+z^2=3$ 的外法线方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\nabla u\cdot\boldsymbol{n}=4\sqrt{3}$.

7. **Solution**.

积分区域如图所示. 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$



8. **Solution**.

法一. Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的四面体，其体积 $V=\dfrac{1}{6}$，形心坐标为 $\left(\dfrac14,\dfrac14,\dfrac14\right)$.

故

$$I=\iiint_\Omega (x+2y+3z)\,\mathrm{d}v=\iiint_\Omega x\mathrm{d}v+2\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}v+3\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v=(1+2+3)\cdot\frac14 V=\frac14.$$

法二. 令 $\begin{cases} u=x+y+z, \\ v=\dfrac{y+z}{x+y+z}, \\ w=\dfrac{z}{y+z} \end{cases}$，则 $\begin{cases} x=u(1-v), \\ y=uv(1-w), \\ z=uvw \end{cases}$，$|J|=\left\|\begin{matrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uv & uv \end{matrix}\right\|=u^2v.$

积分区域 Ω 在 uvw 坐标系中的表示为 $0 \le u \le 1$，$0 \le v \le 1$，$0 \le w \le 1$，所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega} (x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v \int_0^1 [u(1-v)+2uv(1-w)+3uvw]\, u^2 v\,\mathrm{d}w \\ &= \int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u \int_0^1 v\,\mathrm{d}v \int_0^1 (1+v+vw)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{4}\int_0^1 v\left(1+v+\frac{v}{2}\right)\mathrm{d}v = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

此代换考虑比例关系，先确定总量 $u = x+y+z$，再确定后两项 $y+z$ 占总量的比例 v，

最后确定 z 占后两项的总和 $y+z$ 的比例 w，从而把积分限转化为常数.

再考虑一例：计算 $I = \iint\limits_D x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $(0,0)$，$(3,0)$，$(0,4)$ 为顶点的三角形及其内部.

Solution. 斜边的方程为 $4x+3y=12$，即 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=1$，令 $\begin{cases} u = \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y, \\ v = \dfrac{\frac{1}{4}y}{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y} \end{cases}$，

则 $\begin{cases} x = 3u(1-v), \\ y = 4uv \end{cases}$，$|J| = \left\| \begin{matrix} 3(1-v) & -3u \\ 4v & 4u \end{matrix} \right\| = 12u$. 故

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 [3u(1-v)]^2 \cdot 4uv \cdot 12u\,\mathrm{d}v \\ &= 432 \int_0^1 u^4\,\mathrm{d}u \int_0^1 v(1-v)^2\,\mathrm{d}v = 432 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2!}{4!} = \frac{36}{5}. \end{aligned}$$

9. **Solution**. 用球坐标代换，锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 对应的球坐标方程为 $\varphi = \frac{\pi}{4}(z \ge 0)$，所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^3 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4\varphi}\,\mathrm{d}(\cos\varphi) = \frac{\pi}{2} \cdot \left.\frac{1}{3\cos^3\varphi}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right). \end{aligned}$$

10. **Solution**. 联立 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2 = 2x \end{cases}$，得锥面和柱面的交线满足 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，

在 xOy 平面上的投影为圆域 $D = \{(x,y) | (x-1)^2+y^2 \le 1\}$，

锥面上被柱面所割下的部分对应于 D 内的点. 所以

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_S \mathrm{d}S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. 因为 $f(x)$ 是连续函数，所以 $\mathrm{e}^x - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 是可导的，从而 $f(x)$ 也是可导的.

对方程两边求导，得 $f'(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 同理可知 $f'(x)$ 也是可导的，

所以对方程两边再次求导，得 $f''(x) = \mathrm{e}^x - f(x)$，即 $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x$.

齐次方程 $f''(x) + f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$，解得 $r = \pm i$，

所以齐次方程的通解为 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

对于 $y = \mathrm{e}^x$，$\lambda = 1$ 不是齐次方程的特征根，所以可设非齐次方程的特解为 $y^* = A\mathrm{e}^x$，

将其代入非齐次方程，得 $2A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$，所以 $A = \frac{1}{2}$.

因此非齐次方程的通解为 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

在方程 $f(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 中令 $x = 0$，得 $f(0) = 1$；

在方程 $f'(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 中令 $x = 0$，得 $f'(0) = 1$.

将 $f(0) = 1$，$f'(0) = 1$ 代入非齐次方程的通解，得 $\begin{cases} C_1 + \frac{1}{2} = 1, \\ C_2 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$

因此 $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

12. **Solution**. 由题可知旋转曲面的方程为 $z = 1 - x^2 - y^2$，令 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 1$，

则 $\nabla F = (2x, 2y, 1)$. 令 $\nabla F // (1,1,1)$，得 $x = y = \frac{1}{2}$，

代入方程可得 $z = \frac{1}{2}$，所以切平面方程为 $x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} + z - \frac{1}{2} = 0$，即 $2x + 2y + 2z = 3$.

13. **Solution**. 即在约束条件 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$ 下，求 $|z|$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法，设 $L(x,y,z,\lambda,\mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30)$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x + 4\mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4\lambda y + 2\mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - z - 6 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 4x + 2y + z - 30 = 0. \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial x} - 2\frac{\partial L}{\partial y}$，得 $2\lambda x = 8\lambda y$，所以 $x = 4y$ 或 $\lambda = 0$.

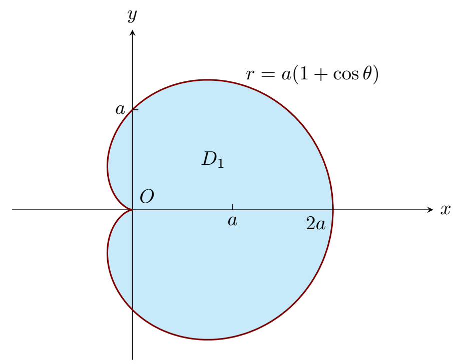
若 $\lambda=0$，则 $\dfrac{\partial L}{\partial x}=4\mu=0$，$\dfrac{\partial L}{\partial z}=2z=0$，代入约束条件得 $\begin{cases}x^2+2y^2=6,\\ 4x+2y=30\end{cases}$，此方程组无解.

因此 $x=4y$，故 $\begin{cases}16y^2+2y^2-z=6,\\ 16y+2y+z=30\end{cases}$，解得 $\begin{cases}y=-2,\\ z=66.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=1,\\ z=12.\end{cases}$

比较可知距离 xOy 平面的距离的最大值为 66.

14. **Solution**.

积分区域如图所示. 由对称性可知 $\displaystyle\iint\limits_D y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以



$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D\left(y\mathrm{e}^x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}\left(1+3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}\left(1+3\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi a^3}{3}+4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi a^3}{3}.
\end{aligned}
$$

15. **Solution**. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{2}\varepsilon$，则当 $||(x,y)||=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\sqrt{|xy|}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}<\frac{\delta}{\sqrt{2}}=\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$，函数 $f(x,y)$ 在原点处连续.

又 $f(x,0)=f(0,y)\equiv0$，所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，因此函数 $f(x,y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}.$$

当 $y=x,x\to0,y\to0$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{|x^2|}{2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}}\neq0$，函数 $f(x,y)$ 在原点处不可微.