CHAPTER 1

2020-2021 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2x - 2e^x$ 的特解 y^* 的形式是（　　）.

   A. $y^* = (Ax + B)e^x$　　**B.** $y^* = x(Ax + B)e^x$

   C. $y^* = Ax + B + Ce^x$　　**D.** $y^* = Ax + B + Cxe^x$

2. 设曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$，点 $M(1, -1, 0)$，则在点 M 处下列说法**不正确**的是（　　）.

   A. 切向量为 $(-2, -2, 4)$　　**B.** 切向量为 $(-2, 2, 4)$

   C. 切线方程为 $x - 1 = y + 1 = -\dfrac{z}{2}$　　**D.** 法平面方程为 $x + y - 2z = 0$

3. 函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处（　　）.

   A. 可微　　**B.** 偏导数存在

   C. 连续　　**D.** 不连续

4. 已知函数 f 连续，则二次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r =$（　　）.

   A. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y$

   B. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y$

   C. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\mathrm{d}x$

   D. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 f(x, y)\mathrm{d}y$

5. 设 $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$，$I = \displaystyle\oint_\Gamma x\,\mathrm{d}s$，$J = \displaystyle\oint_\Gamma y\,\mathrm{d}s$，$K = \displaystyle\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s$. 以下说法中正确的是（　　）.

A. $K=0$　　**B.** I,J,K 中有两个等于 0

C. I,J,K 都等于 0　　**D.** I,J,K 全都不等于 0

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$. 以下说法中正确的是（　　）.

A. $S(x)$ 处处连续　　**B.** $S(x)\equiv f(x)$

C. $S(-1)=0$　　**D.** $S(0)=\pi$

2　填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $x-y+2z+4=0$ 的夹角是 ________.

8. 设 $P_0(1,1,-1)$，$P_1(2,-1,0)$，则 $u=x+y^2+z^3$ 在 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为 ________.

9. 若 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $z_x(0,0)=$ ________.

10. 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$ 的和函数为 ________.

3　基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\dfrac{y}{x}$ 的通解.

12. 已知函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 有二阶连续偏导数，g 可导，求 z_x，z_{xy}.

13. 计算二次积分 $I=\int_1^3 \mathrm{d}x\int_{x-1}^2 \sin y^2\mathrm{d}y$.

14. 求三重积分 $I=\iiint\limits_V (x^3+y^2+z)\,\mathrm{d}v$，其中 V 为 $x^2+y^2+z^2\le a^2$，$a>0$.

15. 求 $I=\iint\limits_S (z^2+x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 S 是 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\le z\le 2)$ 下侧.

16. 将 $f(x)=\arctan x$ 展开为 Maclaurin 级数，并求 $f^{(20)}(0)$，$f^{(21)}(0)$.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 求 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

18. 已知曲线积分 $\int_L yf(x)\,\mathrm{d}x+\left[f(x)-x^2\right]\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 和 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)\,\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\,\mathrm{d}y$ 的值.

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $D: x^2+y^2\le 1$，证明不等式：$\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le \dfrac{2}{5}\pi$.

20. 设 $f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(x)$ 在原点的邻域内有界，证明：$\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)-1\right)$ 绝对收敛.

CHAPTER 2

2020-2021 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.

   方程对应的齐次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为

   $$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0,$$

   有两个不同的实根 $r_1 = 1$，$r_2 = 2$.

   对于非齐次项 $2x$，因为 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根，所以可以设特解为 $y_1^* = Ax + B$.

   对于非齐次项 $-2e^x$，因为 $\lambda = 1$ 是特征方程的根，所以可以设特解为 $y_2^* = Cxe^x$.

   由解的叠加原理，非齐次方程的特解可以设为

   $$y^* = y_1^* + y_2^* = Ax + B + Cxe^x.$$

2. **Solution**. B.

   两曲面的法向量分别为

   $$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z), \quad \nabla(x + y + z) = (1, 1, 1).$$

   在 $M(1, -1, 0)$ 处取值得

   $$\boldsymbol{n}_1 = (2, -2, 0), \quad \boldsymbol{n}_2 = (1, 1, 1).$$

   因而曲线的切向量可取作

   $$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (2, -2, 0) \times (1, 1, 1) = (-2, -2, 4),$$

   所以 A、C、D 都正确，而 B 不是切向方向.

3. **Solution**. C.

   因为

   $$\lim_{\substack{r \to 0, \\ \theta \in [0, 2\pi]}} r \equiv 0,$$

所以函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处连续. 又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

极限不存在，所以偏导数不存在，更不可微.

4. **Solution**. C.

极坐标区域为

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le 2\sin\theta,$$

即第一象限内圆

$$x^2+(y-1)^2\le 1$$

的部分. 改写成直角坐标可得

$$0\le y\le 2,\quad 0\le x\le\sqrt{2y-y^2},$$

故选 C.

5. **Solution**. B.

由对称性可知

$$\oint_\Gamma x\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x+y+z)\,\mathrm{d}s=0,$$
$$\oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma\mathrm{d}s\ne 0.$$

所以恰有两个积分为零.

6. **Solution**. C.

傅里叶级数在连续点收敛到原函数值，在跳跃点收敛到左右极限平均值. 因为 $-1\in(-\pi,0)$，故

$$S(-1)=f(-1)=0.$$

而

$$S(0)=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\ne\pi.$$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\frac{\pi}{6}$.

直线方向向量为 $(2,1,1)$，平面法向量为 $(1,-1,2)$. 设夹角为 θ，则

$$\sin\theta=\frac{|(2,1,1)\cdot(1,-1,2)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\theta=\frac{\pi}{6}.$$

8. **Solution**. 0.

$$\nabla u = (1, 2y, 3z^2),$$

在 $P_0(1,1,-1)$ 处为 $(1,2,3)$. 又

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (1,-2,1),$$

二者点积为 0，故方向导数为 0.

9. **Solution**. $-\dfrac{1}{3}$.

对方程

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z} + xyz = 1$$

两边关于 x 求偏导，得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}(1+3z_x) + yz + xy\,z_x = 0.$$

在 $(0,0)$ 处有 $z=0$，从而有

$$1+3z_x(0,0)=0, \qquad z_x(0,0) = -\frac{1}{3}.$$

10. **Solution**. $\cos x$.

注意到 $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，两端求导得

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 令

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = ux.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

原方程化为

$$x\left(u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = ux\ln u,$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u(\ln u - 1).$$

分离变量并积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C,$$

即

$$\ln\frac{y}{x} = Cx + 1.$$

12. **Solution**. 记

$$u = xy, \qquad v = yg(x),$$

则 $z = f(u, v)$. 由链式法则

$$z_x = f_1' u_x + f_2' v_x = y(f_1' + g'(x) f_2').$$

再对 y 求偏导，得

$$z_{xy} = f_1' + g'(x) f_2' + y \left[x f_{11}'' + (g(x) + x g'(x)) f_{12}'' + g'(x) g(x) f_{22}'' \right].$$

13. **Solution**. 原积分区域为

$$1 \le x \le 3, \quad x - 1 \le y \le 2.$$

交换积分次序后可写成

$$0 \le y \le 2, \quad 1 \le x \le y + 1.$$

因而

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_1^{y+1} \sin y^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^2 y \sin y^2 \, \mathrm{d}y.$$

令 $t = y^2$，则

$$I = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1 - \cos 4).$$

14. **Solution**. 由对称性知

$$\iiint\limits_V x^3 \, \mathrm{d}v = \iiint\limits_V z \, \mathrm{d}v = 0,$$

所以

$$I = \iiint\limits_V y^2 \, \mathrm{d}v = \frac{1}{3} \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}v.$$

用球坐标代换，

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^a \rho^4 \, \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi a^5}{15}.$$

15. **Solution**. 将 S 与上盖面

$$S_1: \ z = 2, \quad x^2 + y^2 \le 4$$

补成闭曲面，其所围区域记为 V. 因 S 取下侧，为闭曲面的外侧方向，因而 S_1 取上侧.

由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned} I &= \oint\!\!\!\oint\limits_{S+S_1} \left(z^2 + x\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \iint\limits_{S_1} \left(z^2 + x\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iiint\limits_V (1 - 1) \, \mathrm{d}v + 2 \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

16. **Solution**. 由

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (|x| < 1)$$

两端积分，得

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad |x|\le 1.$$

比较 Maclaurin 展开系数可知

$$f^{(20)}(0)=0,\qquad f^{(21)}(0)=20!.$$

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 令 $\begin{cases} f_x=4x^3-2x-2y=0,\\ f_y=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$ 可得驻点

$$(0,0),(1,1),(-1,-1).$$

再由

$$f_{xx}=12x^2-2,\quad f_{yy}=12y^2-2,\quad f_{xy}=-2$$

可知在 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 处 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$，所以 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 是 f 的极小值点，极小值为

$$f(1,1)=f(-1,-1)=-2.$$

对于驻点 $(0,0)$，令 $y=x$，则 $f(x,y)=2x^4-4x^2=2x^2(x^2-2)$，当 $|x|>0$ 充分小时有 $f(x,y)<0$；
再令 $y=-x$，则 $f(x,y)=2x^4$，当 $|x|>0$ 充分小时有 $f(x,y)>0$，
这意味着在 $(0,0)$ 的任意邻域内，$f(x,y)$ 既能取到正值也能取到负值，
因此 $f(0,0)=0$ 既不是极小值也不是极大值.

18. **Solution**. 记

$$P(x,y)=yf(x),\qquad Q(x,y)=f(x)-x^2.$$

由路径无关得

$$P_y=Q_x,$$

即

$$f'(x)-f(x)=2x.$$

解得

$$f(x)=C\mathrm{e}^x-2x-2.$$

再由 $f(0)=1$ 得 $C=3$，故

$$f(x)=3\mathrm{e}^x-2x-2.$$

取折线路径 $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)$，则

$$\begin{aligned} I&=\int_{(0,0)}^{(1,0)} yf(x)\,\mathrm{d}x+\int_{(1,0)}^{(1,1)}\left(3\mathrm{e}^x-2x-2-x^2\right)\,\mathrm{d}y\\ &=(3\mathrm{e}-5)\int_0^1\mathrm{d}y\\ &=3\mathrm{e}-5.\end{aligned}$$

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 用极坐标代换，

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \sin(r^3)\,r\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 r\sin(r^3)\,\mathrm{d}r.$$

由 $\sin t \le t$（$t \ge 0$）得

$$2\pi\int_0^1 r\sin(r^3)\,\mathrm{d}r \le 2\pi\int_0^1 r\cdot r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{5}.$$

于是原不等式成立.

20. **Proof**. 因 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有界，设

$$|f''(x)| \le M \qquad (|x|<1).$$

当 n 充分大时，$x_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \in (-1,1)$. 由 Taylor 公式可得

$$f(x_n) = f(0) + f'(0)x_n + \frac{f''(\theta_n x_n)}{2}x_n^2,$$

其中 $0<\theta_n<1$. 利用 $f(0)=1$，$f'(0)=0$ 得

$$f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 = \frac{f''\left(\frac{\theta_n}{n^\alpha}\right)}{2n^{2\alpha}}.$$

所以

$$\left|f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1\right| \le \frac{M}{2n^{2\alpha}}.$$

当 $\alpha > \dfrac{1}{2}$ 时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ 收敛，于是由比较判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1\right|$$

收敛，即原级数绝对收敛.