CHAPTER 1

2022-2023 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

2. 求极限 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+x)}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

3. 求当 $x \to 0$ 时，无穷小量 $x - \arctan x$ 的主部和阶数.

4. 设 $b=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\cos x-2}{\tan x}$ 为常数，求 a,b.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，求 $f(x)$ 的间断点并判断类型.

6. 设 $y(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}(x\neq 0,x\neq\pm 1)$，求 $y'(x)$.

7. 设二阶可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+x\mathrm{e}^{y}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

8. 设 $y=(1+x^2)^{\sin x}$，求 $\mathrm{d}y$.

9. 已知 $f(x)=x^3\ln(1+x)$，求 $f^{(10)}(0)$.

10. 求曲线 $r=1-\cos\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$ 的连续性.

12. 设 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，$f(x)$ 可导，$f(1)=2, f'(1)=-4$，求 $y=g(1+x^2)$ 在 $x=1$ 处的导数.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导，且 $f'(1)=0$，$f''(1)=0$，$y=f^2(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}$.

14. 设函数 $g(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，函数 $f(x)$ 可导，求 $F(x)=f(g(x))$ 的导数.

15. 将水以 $4\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率注入一个圆锥形容器中，容器顶朝下倒立，它的高度为 8m，底面半径为 4m，当容器内的水深达 5m 时，水面升高的速率是多少?

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设 $x_n>0$，$x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n}<4(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|\leq M$，$f(x)$ 在 $(0,b)$ 内取得最大值，试证：$|f'(0)|+|f'(b)|\leq Mb$.

CHAPTER 2

2022-2023 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 设 $x_n = \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}$，则

$$n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \le x_n \le n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}, \quad n > 1.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \pi$，$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \pi$，
所以 $l = \pi$.

2. **Solution**.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x - x}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. **Solution**.

法一. 设 $f(x) = \arctan x$，则 $f(0) = 0$，$f'(0) = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1$，

$f''(0) = -\left.\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0} = 0$，$f'''(0) = \left.\frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\right|_{x=0} = -2$，

所以 $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，于是

$$x - \arctan x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3.$$

即主部为 $\frac{1}{3}x^3$，阶数为 3.

法二. 设 $x \to 0$，$x - \arctan x$ 的主部为 cx^r，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{cx^r} = 1$.
因

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{(x-\arctan x)'}{(cx^r)'} &= \frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{crx^{r-1}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{crx^{r-3}}, \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{crx^{r-3}}=1$，从而 $r=3,c=\dfrac{1}{3}$，即主部为 $\dfrac{1}{3}x^3$，阶数为 3.

4. **Solution**. 由 b 是常数，$\lim\limits_{x\to0}\tan x=0$ 知，$\lim\limits_{x\to0}(x+a\cos x-2)=0$，于是 $a=2$.

进而 $b=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2(\cos x-1)}{x}=1$，即 $a=2,b=1$.

5. **Solution**. 当 $x=0,x=1$ 时，$f(x)$ 无定义，故 $x=0,x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

因

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\cdot\frac{1}{|x-1|}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}\\&=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0.\end{aligned}$$

类似可得 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，所以 $x=0$ 是可去间断点.

（或 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\ln|x|\cdot\dfrac{1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to0}x\ln|x|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$）

又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}f(x)&=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}\sin x=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}\sin x=\sin 1\\\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\frac{-\ln x}{x-1}\sin x=-\sin 1,\end{aligned}$$

所以 $x=1$ 是跳跃间断点.

6. **Solution**. 化简得 $y(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

所以

$$y'(x)=\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x-(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

7. **Solution**. 由题设有 $x=0,y=1$，方程两边关于 x 求导得

$$(1-xe^y)y'=e^y, \tag{$*$}$$

$$y'(0)=e.$$

方程 $(*)$ 两边再关于 x 求导得

$$(1-xe^y)y''=2y'e^y+x\cdot(y')^2\cdot e^y,$$

所以

$$y''(0)=2e^2,\quad 即\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=2e^2.$$

8. **Solution**. 因 $\ln y=\sin x\ln(1+x^2)$，所以

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln(1+x^2)+\sin x\cdot\frac{2x}{1+x^2},$$

即

$$y'=\left(\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right)y=(1+x^2)^{\sin x}\left(\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right),$$

因此

$$\mathrm{d}y = (1+x^2)^{\sin x}\left(\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

9. **Solution**. 取 $v(x) = x^3$，它的四阶以上的导数为 0，

$$u^{(k)}(x) = (\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k = 1, 2, \cdots,$$

由 Leibniz 公式 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$，得

$$f^{(10)}(x) = x^3\frac{(-1)^9 9!}{(1+x)^{10}} + 30x^2\frac{(-1)^8 8!}{(1+x)^9} + 3\times 10\times 9x\frac{(-1)^7 7!}{(1+x)^8} + 10\times 9\times 8\frac{(-1)^6 6!}{(1+x)^7}.$$

所以 $f^{(10)}(0) = \dfrac{10!}{7}$.

10. **Solution**. 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = (1-\cos\theta)\cos\theta, \\ y = (1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$. 于是得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta}.$$

代入 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 得到 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$，$x = 0, y = 1$，因此切线方程为 $y = -x + 1$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**. 当 $x > 0$ 时，$\mathrm{e}^{nx} \to +\infty (n\to\infty)$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2 + x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}} = x^2$；

当 $x < 0$ 时，$\mathrm{e}^{nx} \to 0 (n\to\infty)$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x + x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}} = x$；

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x + x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}} = 0$，

综上所述，$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x, & x \le 0. \end{cases}$

当 $x \ne 0$ 时，$f(x) = x^2$ 及 $f(x) = x$ 均为幂函数，连续；

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，且 $f(0) = 0$，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续.

12. **Solution**. 由题意得 $g'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{4}$.

所以

$$y'(1) = [2xg'(2)]|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

13. **Solution**. $y'(x) = 2f(x)f'(x)$，

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1} &= \lim_{x\to1}\frac{y'(x)-y'(1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{2f(x)f'(x)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{2f(x)(f'(x)-f'(1))}{x-1}\\ &= 2f(1)f''(1) = 0.\end{aligned}$$

14. **Solution**. $F(x) = \begin{cases} f\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ f(0), & x=0.\end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$F'(x) = f'\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(3x^2\sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x}\right)$，

当 $x=0$ 时，

$$g'(0) = \lim_{x\to0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x} = 0,$$
$$F'(0) = f'\left(g(0)\right)\cdot g'(0) = f'(0)\cdot 0 = 0.$$

15. **Solution**. 设时刻 t 容器中水的体积为 $V\mathrm{m}^3$，水的高度为为 hm，水面半径为 rm，则

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{8},\quad 即\, r = \frac{h}{2},\quad 因而\, V = \frac{1}{12}\pi h^3,$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{4}\pi h^2\cdot\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

当 $h=5$m 时，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{16}{25\pi}$m/min. 即水面升高的速率是 $\dfrac{16}{25\pi}$m/min.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**. 由 $x_{n+1}-x_n < 4-\dfrac{4}{x_n}-x_n = -\left(\sqrt{x_n}-\dfrac{2}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \leq 0$ 得到 $\{x_n\}$ 单调递减.

(或由均值不等式 $\sqrt{x_{n+1}\cdot\dfrac{4}{x_n}} \leq \dfrac{x_{n+1}+\frac{4}{x_n}}{2}$ 及 $x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n} < 4$ 得 $\sqrt{x_{n+1}\cdot\dfrac{4}{x_n}} < 2$，即 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$，从而 $\{x_n\}$ 单调递减.)

又 $x_n > 0$，由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $A > 0$. 由 $x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n} < 4$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}+\dfrac{4}{x_n}\right) \leq 4$，即 $A+\dfrac{4}{A}\leq 4$，解得 $A=2$.

17. **Proof**. 设 $f(x)$ 在 $x_0\in(0,b)$ 处取得最大值，则 $f'(x_0)=0$.

对函数 $f'(x)$ 在 $[0,x_0],[x_0,b]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理，得

$$f'(x_0)-f'(0) = f''(\eta)x_0,\quad \exists\eta\in(0,x_0)$$
$$f'(b)-f'(x_0) = f''(\xi)(b-x_0),\quad \exists\xi\in(x_0,b)$$

$|f'(0)|+|f'(b)| = |f''(\eta)|x_0 + |f''(\xi)|(b-x_0) \leq Mx_0 + M(b-x_0) = Mb.$