CHAPTER 1

2022-2023 学年微积分（一）（上）期末考试

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 若 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是与 Δx（　　）的无穷小.

   A. 高阶　　**B.** 低阶

   C. 同阶　　**D.** 等价

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件是（　　）.

   A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在

   B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$ 存在

   C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在

   D. $\lim\limits_{x\to \infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 存在

3. 下列关于数列的描述中，正确的是（　　）.

   A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

   B. 若 $\{x_ny_n\}$ 有界，则必有 $\{x_n\}$ 有界或 $\{y_n\}$ 有界

   C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

   D. 若有区间 I 内的数列 x_n，使 $|f(x_n)|$ 无界，则 $f(x)$ 在 I 内无界

4. 设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $f'(x)>0$，若 $f(a)=0$，则在区间 $(a,+\infty)$ 内有（　　）.

   A. $f(x)\geq 0$　　**B.** $f(x)>0$

   C. 不能确定 $f(x)$ 的符号　　**D.** $f(x)$ 单调趋向于 $+\infty$

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则下列结论成立的是（　　）.

A. $f'(0)$ 存在，且 $f'(0) \neq 0$ **B.** $f'(0)$ 不存在

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 **D.** $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)} =$ ( ) .

A. $\int_1^2 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ **B.** $2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ **D.** $2\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 当 $x \to 0$ 时，无穷小量 $(1+x)^{x^2}-1$ 的阶数是 = ________.

8. 曲线 $\cot\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ________.

9. 若 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int_1^{+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x =$ ________.

10. 曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$ ________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求曲线 $C: y = x\arctan x (x>0)$ 的渐近线.

12. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)=f'(a)=1$，求 $l=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}\right)$.

13. 求 $I=\int \frac{1}{x(x^n+1)}\,\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

14. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x+y^4}$ 的通解.

15. 设 $f(x)=\int_x^1 \sin t^2\,\mathrm{d}t$，计算 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

16. 求 $F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的极值.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 已知函数 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{x^2}^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$，讨论方程 $f(x)=0$ 的实根个数.

18. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)\,\mathrm{d}t=-\frac{x^3}{3}-x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$g(x)\geq 0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f'(0)=f'(2)=0$. 试证：存在 $\xi\in(0,2)$，使

$$|f''(\xi)|\geq|f(2)-f(0)|.$$

CHAPTER 2

2022-2023 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. C.

   由导数的定义，$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{d}y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2}$.

   因此 $\mathrm{d}y$ 与 Δx 是同阶无穷小，但不是等价无穷小.

2. **Solution**. D.

   对于 A 选项，考虑 $f(x)=|x|$，则

   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(-x)}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)-(-x)}{2x} = 0，\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(-x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-x}{2x} = 0,$$

   故 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(-x)}{2x} = 0$ 存在，但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

   对于 B 选项，令 $t=x^2$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ 存在，仅能说明 $f'_+(0)$ 存在.

   对于 C 选项，考虑 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}} = 1$ 存在，但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

   对于 D 选项，令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t}$ 存在，

   结合 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性可得 $f(0) = \lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} \cdot t = 0$，

   所以 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t}$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

3. **Solution**. D.

   对于 A，B，C 选项，考虑

   $$x_n = \begin{cases} 0, & n=2k-1, \\ n, & n=2k \end{cases},\quad y_n = \begin{cases} n, & n=2k-1, \\ 0, & n=2k \end{cases},$$

   其中 k 是正整数. 则 $x_n y_n \equiv 0$，但 x_n，y_n 均无界，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均不存在.

4. **Solution**. C.

   假设 $a>0$，考虑函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2a}, & x>a,\\ 0, & x=a.\end{cases}$

   显然 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导，当 $a<x<2a$ 时，$f(x)<0$；当 $x>2a$ 时，$f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2a}<+\infty$.

5. **Solution**. C.

   结合 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot x^2=0$，

   因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot x=0$，即 $f'(0)=0$.

   又由极限的保号性，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x^2}>0$，所以 $f(x)>0$. 即 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

6. **Solution**. C.

   由定积分的定义可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\\&=\int_0^1\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. 3.

   当 $x\to 0$ 时，

$$(1+x)^{x^2}-1=\mathrm{e}^{x^2\ln(1+x)}-1=\mathrm{e}^{x^2(x+o(x))}-1=\mathrm{e}^{x^3+o(x^3)}-1=x^3+o(x^3).$$

   所以无穷小量 $(1+x)^{x^2}-1$ 的阶数是 3.

8. **Solution**. $2x+3y=0$.

   方程 $\cot\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 两边对 x 求导得

$$-\csc^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y')=\mathrm{e}^y y'.$$

   将 $x=0$，$y=0$ 代入上式解得 $y'(0)=-\dfrac{2}{3}$，所以切线方程为 $2x+3y=0$.

9. **Solution**. 0.

   由题可知，$f(x)=\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)'=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$. 故 $f(\ln x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$.

   所以

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_1^{+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^{+\infty}(\ln x-1)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\left.\frac{\ln x-1}{x}\right|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=1+\left.\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty}=0.\end{aligned}$$

10. **Solution**. $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

$y'=\tan x$，所以 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\sec x\,\mathrm{d}x$，

故

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 曲线 C 没有竖直渐近线和水平渐近线. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-1.$$

所以 $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ 是曲线 C 的斜渐近线.

12. **Solution**. 由积分中值定理，存在 ξ 介于 a 和 x 之间，使得 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$，

当 $x\to a$ 时，$\xi\to a$，所以

$$\begin{aligned}
l&=\lim_{x\to a}\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)}{(x-a)\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)}{(x-a)^2 f(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{2(x-a)}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{1}{2}f'(a)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

13. **Solution**.

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{1}{x(x^n+1)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^{-n-1}}{x^{-n}+1}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{n}\int\frac{1}{x^{-n}+1}\,\mathrm{d}\left(x^{-n}+1\right)\\
&=-\frac{1}{n}\ln\left|x^{-n}+1\right|+C.
\end{aligned}$$

14. **Solution**. 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2x}{y}=y^3$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned}
x&=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y}\left(C+\int y^3\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right)\\
&=y^2\left(C+\int y\,\mathrm{d}y\right)=y^2\left(C+\frac{1}{2}y^2\right)=Cy^2+\frac{1}{2}y^4.
\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

15. **Solution**. 由题可知 $f(1)=0$，$f'(x)=-\sin x^2$，所以

$$\begin{aligned} I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\sin x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2\,\mathrm{d}x^2 \\ &= -\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^1 \\ &= \frac{1-\cos 1}{2}. \end{aligned}$$

16. **Solution**. $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内，令 $F'(x)=0$ 得 $x=0$.

计算

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t &= -\int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\cos t=-\mathrm{e}^{-t}\cos t-\int \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-t}\cos t-\int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\sin t \\ &= -\mathrm{e}^{-t}\cos t-\mathrm{e}^{-t}\sin t-\int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

所以 $\int \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(\sin t+\cos t)+C$，

因此极值 $F(0)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(\sin t+\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. $f'(x)=\sqrt{1+x^2}-2x\sqrt{1+x^2}=(1-2x)\sqrt{1+x^2}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调增加，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调减少.

因为

$$f(0)=\int_1^0\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sqrt{1+t}-\sqrt{1+t^2}\right)\mathrm{d}t>0,$$

$$f(1)=0,\quad f(-1)=\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t<0,$$

故方程 $f(x)=0$ 有两个实根.

18. **Solution**. 令 $t-x=u$，则 $\int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u=-\frac{x^3}{3}-x^2$.

方程两边求导得 $f(-x)=-x^2-2x$，所以 $f(x)=-x^2+2x$.

因而旋转体的体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi xf(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2 x(-x^2+2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^2(-x^3+2x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 易知函数 $\sqrt[n]{f(x)}$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，因而具有最小值 m 和最大值 M. 所以

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

由介值定理，存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 $\sqrt[n]{f(\xi)} = \dfrac{\displaystyle\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x}$.

上式两边取极限，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(\xi)} = 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x} = 1$，

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

20. **Proof**. 由 Taylor 公式，将 $f(x)$ 分别在 $x=0$ 和 $x=2$ 处展开得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2 = f(0) + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2,$$
$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(x-2)^2 = f(2) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(x-2)^2,$$

两式相减得

$$f(2) - f(0) = \frac{1}{2}\left[f''(\zeta)(x-2)^2 - f''(\eta)x^2\right].$$

所以

$$|f(2) - f(0)| \leq \frac{1}{2}\left[|f''(\zeta)|(x-2)^2 + |f''(\eta)|x^2\right].$$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\eta)|, |f''(\zeta)|\}$，则

$$|f(2)-f(0)| \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)|\left[(x-2)^2 + x^2\right] \leq \frac{1}{2}|f''(\xi)|\cdot 2 = |f''(\xi)|,$$

即 $|f''(\xi)| \geq |f(2) - f(0)|$.