CHAPTER 1

2021-2022 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的待定特解形式可设为（　　）.

   A. $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$　　**B.** $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$

   C. $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$　　**D.** $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$

2. 在下列极限结果中，正确的是（　　）.

   A. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$　　**B.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

   C. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} = 0$　　**D.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x+y} = 0$

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y \int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$ 等于（　　）.

   A. $2f(2)$　　**B.** $f(2)$

   C. $-f(2)$　　**D.** 0

4. 设曲线 $L: f(x,y) = 1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数），过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是（　　）.

   A. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}s$

   B. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}x$

   C. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}y$

   D. $\int_T f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

5. 设 L 为空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则 $\oint_L x^2\mathrm{d}s =$（　　）.

A. 0 **B.** $2\pi a^3$

C. $\frac{1}{3}\pi a^2$ **D.** $\frac{2}{3}\pi a^3$

6. 设两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则（　　）.

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛

D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 经过点 $A(1,-2,3)$ 并且包含 x 轴的平面方程为 __________.

8. 设向量场 $\boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$，则 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\Big|_{(1,1,2)} =$ __________.

9. $u = xe^y z^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}u =$ __________.

10. 若将函数 $f(x) = \pi - x$（$0 \le x \le \pi$）展开成正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，则系数 b_4 的值为 __________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 设方程组 $\begin{cases} u+v=x, \\ u^2+v^2=y \end{cases}$ 确定隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，且 $u \neq v$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

12. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $S: z=x^2+y^2$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 处指向上侧的法向量，求函数 $u=xz^3-3yz$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$.

13. 计算 $I=\displaystyle\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是正方形区域 $0\le x\le 2, 0\le y\le 2$.

14. 计算 $I=\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

15. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$（$R>0$）的外侧，求 $I=\displaystyle\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

16. 确定幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域并求其和函数 $S(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，求非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 的解.

18. 求 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4, y\geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$ 是条件收敛的.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其始点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记 $I=\displaystyle\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$，(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

CHAPTER 2

2021-2022 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. A.

   方程对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程 $r^2+1=0$ 有两个单根 $r=i,-i$，所以齐次方程的通解为

   $$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

   对于非齐次项 x^2+1，特解可以设为 $y_1=ax^2+bx+c$；

   对于非齐次项 $\sin x$，由于 $\lambda=i$ 是特征方程的根，所以特解可以设为 $y_2=x(A\sin x+B\cos x)$，

   由解的叠加原理，非齐次方程的特解可以设为

   $$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x).$$

2. **Solution**. B.

   对于 A 选项，当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $y=x$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$；

   当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $y=-x$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{2x^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 A 选项错误；

   对于 B 选项，因为

   $$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le|y|,$$

   所以由夹逼准则可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$，所以 B 选项正确；

   对于 C 选项，当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $y=x^2-x$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(x^2-x\right)}{x^2}=-1$；

   当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $y=x$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x}=0$，所以 C 选项错误；

   对于 D 选项，当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $y=x^3-x$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(x^3-x\right)}{x^3}=-1$；

   当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $y=x$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2x}=0$，所以 D 选项错误.

3. **Solution**. B.

先交换积分顺序

$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^t \mathrm{d}x\int_1^x f(x)\,\mathrm{d}y=\int_1^t (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因而

$$F'(t)=(t-1)f(t),$$

所以

$$F'(2)=f(2).$$

4. **Solution**. C.

因为在曲线 $L: f(x,y)=1$ 上恒有 $f(x,y)=1$，故

$$\int_T f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_T \mathrm{d}y=y_N-y_M<0,$$

其中因 M 在第二象限、N 在第四象限，所以 $y_N<y_M$.

5. **Solution**. D.

交线 L 是球面与过原点平面相交得到的大圆，因此半径为 a. 由对称性可知

$$\oint_L x^2\,\mathrm{d}s=\oint_L y^2\,\mathrm{d}s=\oint_L z^2\,\mathrm{d}s.$$

又

$$\oint_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=a^2\oint_L \mathrm{d}s=a^2\cdot 2\pi a=2\pi a^3.$$

三者相等，所以

$$\oint_L x^2\,\mathrm{d}s=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

6. **Solution**. C.

对于 A 选项，令 $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 A 选项错误；

对于 B 选项，令 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 B 选项错误；

对于 C 选项，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则对于充分大的 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|a_n|<1$；

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，根据级数收敛的必要条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，

于是同理存在充分大的 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $|b_n|<1$，所以当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，$a_n^2b_n^2\le b_n^2\le|b_n|$，

由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛，所以 C 选项正确；

对于 D 选项，令 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散，

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 D 选项错误.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $3y+2z=0$.

   由于所求平面包含 x 轴, 所以它含有方向向量 $(1,0,0)$. 又它经过点 $A(1,-2,3)$, 故还含有向量 $(1,-2,3)$. 两向量叉积可取法向量

   $$(1,0,0)\times(1,-2,3)=(0,-3,-2),$$

   所以平面方程为

   $$3y+2z=0.$$

8. **Solution**. $-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

   $$\boldsymbol{A}=(x^2,yz,zx),$$

   因而

   $$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2&yz&zx\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(zx)}{\partial y}-\frac{\partial(yz)}{\partial z},\frac{\partial(x^2)}{\partial z}-\frac{\partial(zx)}{\partial x},\frac{\partial(yz)}{\partial x}-\frac{\partial(x^2)}{\partial y}\right)\\&=(-y,-z,0).\end{aligned}$$

   在 $(1,1,2)$ 处取值即得

   $$-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}.$$

9. **Solution**. $\mathrm{e}\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}\,\mathrm{d}y+3\mathrm{e}\,\mathrm{d}z$.

   $$u=x\mathrm{e}^yz^3,\quad u_x=\mathrm{e}^yz^3,\quad u_y=x\mathrm{e}^yz^3,\quad u_z=3x\mathrm{e}^yz^2.$$

   在 $(1,1,1)$ 处有 $u_x=u_y=\mathrm{e}$, $u_z=3\mathrm{e}$，故

   $$\mathrm{d}u=\mathrm{e}\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}\,\mathrm{d}y+3\mathrm{e}\,\mathrm{d}z.$$

10. **Solution**. $\dfrac{1}{2}$.

    由

    $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

当 $n=4$ 时

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin 4x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 4(\pi-x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 4x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[x\cos 4x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos 4x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 对方程组 $\begin{cases} u+v=x, \\ u^2+v^2=y \end{cases}$ 关于 x 求偏导，得

$$\begin{cases} u_x+v_x=1, \\ 2uu_x+2vv_x=0. \end{cases}$$

解得

$$u_x=\frac{v}{v-u}, \qquad v_x=-\frac{u}{v-u}.$$

12. **Solution**. 曲面写成

$$z-x^2-y^2=0,$$

所以上侧法向量可取

$$\boldsymbol{n}=(-2x,-2y,1).$$

在 $P_0(1,1,2)$ 处，

$$\boldsymbol{n}=(-2,-2,1), \qquad \boldsymbol{n}_0=\frac{1}{3}(-2,-2,1).$$

又

$$u=xz^3-3yz, \qquad \nabla u=(z^3,-3z,3xz^2-3y),$$

所以

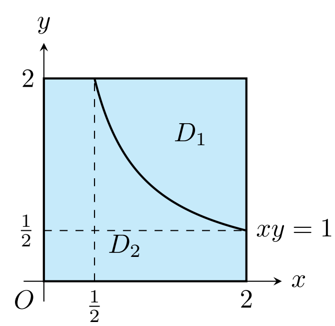
$$\nabla u(P_0)=(8,-6,9).$$

因而方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{P_0}=\nabla u(P_0)\cdot\boldsymbol{n}_0=\frac{-16+12+9}{3}=\frac{5}{3}.$$

13. **Solution**. 如图, 按曲线 $xy=1$ 将区域 D 分为 $D_1=\{(x,y)\in D \mid xy\geq 1\}$ 和 $D_2=\{(x,y)\in D \mid xy<1\}$. 当 $xy<1$ 时 $\max\{xy,1\}=1$，当 $xy\geq 1$ 时 $\max\{xy,1\}=xy$. 故

$$I=\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



逐段积分得

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\,\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2} y\,\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_0^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{19}{4}+\ln 2. \end{aligned}$$

14. **Solution**. 曲面 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 关于 xOz 面对称，而 xy 与 yz 都关于 y 为奇函数，因此

$$\iint_\Sigma xy\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma yz\,\mathrm{d}S=0.$$

从而

$$I=\iint_\Sigma zx\,\mathrm{d}S.$$

投影到 xOy 面，因

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

用极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，区域为

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le 2a\cos\theta.$$

又 $z=r$，故

$$\begin{aligned}I&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta\,\mathrm{d}r\\&=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.\end{aligned}$$

15. **Solution**. 由 Gauss 公式可得

$$I=\iiint_V\left(\frac{\partial x^3}{\partial x}+\frac{\partial y^3}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint_V(3x^2+3y^2+1)\,\mathrm{d}v.$$

再利用球域的轮换对称性，

$$\iiint_V(3x^2+3y^2)\,\mathrm{d}v=2\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$$

因而

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^3\\&=\frac{8\pi R^5}{5}+\frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

16. **Solution**. 用比值判别法，令 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{(n+2)}\cdot\frac{n+1}{n}\right|=1,$$

因此级数的收敛半径为 1. 当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\ne 0$，所以级数发散；

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}(-1)^n$ 不存在，所以级数发散. 故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x=0$ 时，$S(0)=0$. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\\ &= \frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\left[-x-\ln(1-x)\right]=\frac{x}{1-x}+1+\frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

综上所述，$S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{x}{1-x}+1+\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & -1<x<1.\end{cases}$

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 由齐次方程通解

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$$

可知特征方程有二重根 $r=1$，于是

$$y''-2y'+y=0.$$

因而原非齐次方程为

$$y''-2y'+y=x.$$

设特解为 $y^*=Ax+B$，代入得

$$Ax+B-2A=x,$$

比较系数得 $A=1,\ B=2$. 所以通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2.$$

由条件

$$y(0)=2,\qquad y'(0)=0$$

解得 $C_1=0,\ C_2=-1$. 因而

$$y=-x\mathrm{e}^x+x+2.$$

18. **Solution**. 在区域内部，令

$$\begin{cases}f_x=2x(1-y^2)=0,\\ f_y=2y(2-x^2)=0,\end{cases}$$

解得驻点为 $(0,0),(\pm\sqrt{2},1)$，其函数值分别为

$$f(0,0)=0,\qquad f(\pm\sqrt{2},1)=2.$$

边界分两部分考察. 当 $y=0$ 时，$f(x,0)=x^2$，$-2\le x\le 2$，所以最小值为 0，最大值为 4.

当 $x^2+y^2=4$ 时，代入 $y^2=4-x^2$ 得 $f=x^4-5x^2+8=\left(x^2-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$，$-2\le x\le 2$，

所以最小值为 $\dfrac{7}{4}$，最大值为 8.

比较边界与内部函数值，得全区域上

$$\max f=8,\qquad \min f=0.$$

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 设

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}.$$

先看绝对收敛性. 注意到

$$|a_n|=\frac{1}{n-(-1)^n}\sim\frac{1}{n}\qquad(n\to\infty),$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 当 $n\ge 2$ 时，设

$$a_n=\frac{(-1)^n\left(n+(-1)^n\right)}{\left(n-(-1)^n\right)\left(n+(-1)^n\right)}=(-1)^n\frac{n}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}=u_n+v_n,$$

其中 $u_n=(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}$ 由 Leibniz 判别法可知收敛，$v_n=\dfrac{1}{n^2-1}\sim\dfrac{1}{n^2}$ 也收敛.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

20. **Proof**. 记

$$P(x,y)=\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)],\qquad Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1].$$

直接计算得

$$P_y=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy),\qquad Q_x=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy),$$

即 $P_y=Q_x$. 因而在上半平面 $y>0$ 内该积分与路径无关.

下面求势函数 $\Phi(x,y)$. 设 $F'(t)=f(t)$，由

$$\Phi_x=P(x,y)=\frac{1}{y}+yf(xy)$$

对 x 积分，得

$$\Phi(x,y)=\int\left(\frac{1}{y}+yf(xy)\right)\mathrm{d}x=\frac{x}{y}+F(xy)+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 只与 y 有关. 再对 y 求偏导，

$$\Phi_y=-\frac{x}{y^2}+xf(xy)+\varphi'(y).$$

与

$$Q(x,y)=xf(xy)-\frac{x}{y^2}$$

比较可得 $\varphi'(y)=0$，故可取

$$\Phi(x,y)=\frac{x}{y}+F(xy).$$

因而

$$I=\Phi(c,d)-\Phi(a,b)=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+F(cd)-F(ab).$$

当 $ab=cd$ 时，最后两项相消，所以

$$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$