CHAPTER 1

2022-2023 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知 $y_1 = x + \cos x$，$y_2 = x + \sin x$，$y_3 = x$ 是某个二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解，求该微分方程及其通解.

2. 已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴正向的夹角相等，$\overrightarrow{OA}$ 的方向余弦为正，点 B 是点 $M(1,-2,2)$ 关于点 $N(-1,2,1)$ 的对称点，求以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的面积.

3. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$，其中 a 为常数.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截出的曲线在 $(3,4,5)$ 处的切线与法平面方程.

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=x+2y$ 确定，求 $\mathrm{d}z|_{(1,2)}$.

6. 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi\left(x^2,\mathrm{e}^y,z\right)=0$，$y=\cos x$，其中 f，φ 具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{4}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$，$f(x,y)$ 为区域 D 上的连续函数，求 $f(x,y)$.

8. 求积分 $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$.

9. 设函数 $z=f\left(x^2-y,\varphi(xy)\right)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，$\varphi(u)$ 二阶可导，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10. 设平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,x^2+y^2\ge 2y,x^2+y^2\ge -2y,x\ge 0\}$，求二重积分 $I=\iint\limits_D\left(y^3+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4z+\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(x)$ 的表达式.

12. 求直线 $L:\begin{cases}x+y+z-1=0,\\2x+y+4z-2=0\end{cases}$ 在曲面 $xy+z=0$ 的点 $P_0(2,1,-2)$ 处切平面上的投影直线的方程.

13. 设曲面 Σ 为曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面，求函数 $u=z^4-3xz+x^2+y^2$ 沿 Σ 上点 $P\left(0,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ 处指向外侧的法向量方向的方向导数.

14. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.

15. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为光滑曲面 $S:\varphi(x,y,z)=0$ 外的一固定点，$P(x,y,z)$ 为 S 上任意一点. 证明: 若 $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|$ 最短，则 $\overrightarrow{P_0P}$ 必是曲面 S 在点 P 处的法向量.

CHAPTER 2

2022-2023 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 由题意可知 $y_1 - y_3 = \cos x$，$y_2 - y_3 = \sin x$ 是方程对应的齐次方程的两个线性无关的解，

   它们构成了齐次方程的一个基础解系，且齐次方程的特征根为 $\pm i$，所以齐次方程为 $y'' + y = 0$.

   设该微分方程的非齐次项为 $f(x)$，将特解 $y_3 = x$ 代入方程 $y'' + y = f(x)$，得 $f(x) = x$.

   所以该二阶常系数非齐次线性微分方程为 $y'' + y = x$，

   其通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. **Solution**. 由题意可知 $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，$\overrightarrow{OB} = (-3,6,0)$.

   所以平行四边形的面积 $S = \left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{42}$.

3. **Solution**.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} &= \lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot x \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot a = a.\end{aligned}$$

4. **Solution**. 设 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50$，$G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

   法一. 因 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(3,4,5)} = \left.\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix}\right|_{(3,4,5)} = -8yz|_{(3,4,5)} = -160 \neq 0$,

   所以方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y = y(x), z = z(x)$.

   方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50 = 0, \\ G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x + 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ 2x + 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$，所以切线的方向向量可取为 $4\left(1, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_{(3,4,5)} = (4, -3, 0)$，

切线的方程为 $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-5}{0}$，

法平面的方程为 $4 \cdot (x-3) - 3 \cdot (y-4) + 0 \cdot (z-5) = 0$，即 $4x - 3y = 0$.

法二. $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$，$\nabla G = (2x, 2y, -2z)$，

取两个曲面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_F = \dfrac{1}{2}\nabla F|_{(3,4,5)} = (3, 4, 5)$，$\boldsymbol{n}_G = \dfrac{1}{2}\nabla G|_{(3,4,5)} = (3, 4, -5)$，

所以切线的方向向量可取为 $-\dfrac{1}{10}\boldsymbol{n}_F \times \boldsymbol{n}_G = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (4, -3, 0)$，

切线的方程为 $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-5}{0}$，

法平面的方程为 $4 \cdot (x-3) - 3 \cdot (y-4) + 0 \cdot (z-5) = 0$，即 $4x - 3y = 0$.

5. **Solution**. 将 $x = 1$，$y = 2$ 代入方程 $(z+y)^x = x + 2y$ 得 $z = 3$. 原方程两边全微分，得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathrm{e}^{x\ln(z+y)} &= \mathrm{d}(x+2y) \\ (z+y)^x\ \mathrm{d}\left(x\ln(z+y)\right) &= \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y \\ (z+y)^x\left(\ln(z+y)\,\mathrm{d}x + x \cdot \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}y}{z+y}\right) &= \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

将 $x = 1, y = 2, z = 3$ 代入上式，得 $5\left(\ln 5\,\mathrm{d}x + \dfrac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}y}{5}\right) = \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y$，

整理得 $\mathrm{d}z|_{(1,2)} = (1 - 5\ln 5)\ \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$.

6. **Solution**. 方程 $\varphi\left(x^2, \mathrm{e}^y, z\right) = 0$ 两边对 x 求导，得

$$\varphi_1' \cdot 2x + \varphi_2' \cdot \mathrm{e}^y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varphi_3' \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2x\varphi_1' + \varphi_2' \cdot \mathrm{e}^y \sin x}{\varphi_3'}$.

从而

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f_1' + f_2' \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f_3' \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f_1' - f_2'\sin x + f_3' \cdot \frac{-2x\varphi_1' + \varphi_2' \cdot \mathrm{e}^y \sin x}{\varphi_3'}.$$

7. **Solution**. 设 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = C$，方程 $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{4}{\pi}C$ 两边在区域 D 上积分，得

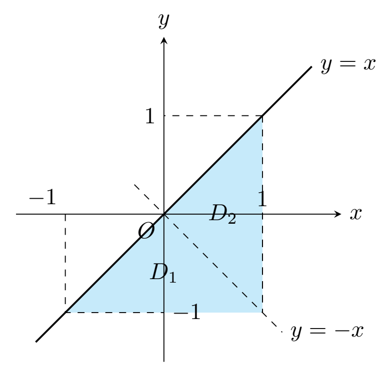
$$\begin{aligned} C &= \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{4}{\pi}C\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{5}{12}\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 4C \\ &= \frac{5}{12}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r - 4C \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{2\pi}{4} - 4C = \frac{5}{24}\pi - 4C. \end{aligned}$$

解得 $C=\dfrac{1}{24}\pi$，所以 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{24}\pi=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{1}{6}$.

8. **Solution**. 积分区域如图所示，其中 $D_1=\{(x,y)|-1\le y\le 0, y\le x\le -y\}$，
$D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,-x\le y\le x\}$. 则 $I=\displaystyle\iint\limits_{D_1+D_2} x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

由于 D_1 关于 y 轴对称，被积函数 $y=x\sqrt{1-x^2+y^2}$ 关于 x 是奇函数，

所以 $\displaystyle\iint\limits_{D_1} x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.



又 D_2 关于 x 轴对称，被积函数 $y=x\sqrt{1-x^2+y^2}$ 关于 y 是偶函数，
所以

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{D_2} x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\left[\frac{2}{3}\left(1-x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=y}^{x=1}\right]\mathrm{d}y\\
&=-\frac{2}{3}\int_0^1\left(y^3-1\right)\,\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

9. **Solution**. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\varphi'(xy)\cdot y$，

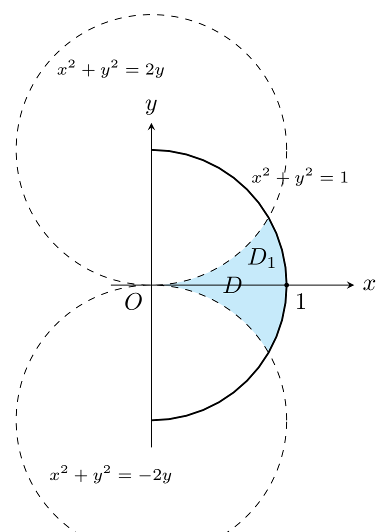
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xf_1'+yf_2'\varphi'(xy)\right)\\
&=2x\left(-f_{11}''+xf_{12}''\varphi'(xy)\right)+f_2'\varphi'(xy)+y\varphi'(xy)\left(-f_{21}''+xf_{22}''\varphi'(xy)\right)+xyf_2'\varphi''(xy)\\
&=-2xf_{11}''+\left(2x^2-y\right)f_{12}''\varphi'(xy)+f_2'\varphi'(xy)+xy\left(f_{22}''\varphi'^2(xy)+f_2'\varphi''(xy)\right).
\end{aligned}
$$

其中由 $f(u,v)$ 二阶偏导数的连续性可得 $f_{12}''=f_{21}''$.

10. **Solution**. 积分区域如图所示，由对称性可得 $I=\displaystyle\iint\limits_D y^3\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

其中 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\ge 2y, x\ge 0, y\ge 0\}$.

用极坐标代换，则



$$
\begin{aligned}
I&=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^1 r^2\,\mathrm{d}r\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{r^3}{3}\Big|_{2\sin\theta}^1\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-8\sin^3\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{\pi}{9}-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{9}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2\theta\right)\,\mathrm{d}\cos\theta\\
&=\frac{\pi}{9}+\frac{16}{3}\left[\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{9}+\frac{16}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}-1+\frac{1}{3}\right)\\
&=\frac{\pi}{9}+\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{9}-\frac{32}{9}+2\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot \mathrm{e}^x\cos y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot\left(-\mathrm{e}^x\sin y\right)$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot \mathrm{e}^{2x}\cos^2 y+f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot \mathrm{e}^x\cos y$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot \mathrm{e}^{2x}\sin^2 y-f'\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot \mathrm{e}^x\cos y.$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)\cdot \mathrm{e}^{2x}=\left(4f\left(\mathrm{e}^x\cos y\right)+\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{e}^{2x},$$

即 $f''(u)=4f(u)+u$. 齐次方程 $f''-4f=0$ 的特征方程为 $r^2-4=0$，解得 $r=\pm 2$，

所以齐次方程的通解为 $C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

对于 $y=x$，$\lambda=0$ 不是特征方程的根，故可设特解为 $y^*=cx$，代入得 $0=4cx+x$，解得 $c=-\dfrac{1}{4}$，

所以非齐次方程的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{4}x$.

将 $f(0)=0$，$f'(0)=0$ 代入上式，得 $\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ 2C_1-2C_2-\dfrac{1}{4}=0\end{cases}$，解得 $C_1=\dfrac{1}{16}$，$C_2=-\dfrac{1}{16}$.

因此 $f(x)=\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{4}x$.

12. **Solution**. 令 $F(x,y,z)=xy+z$，$\nabla F=(y,x,1)$，

则曲面 $xy+z=0$ 在点 $P_0(2,1,-2)$ 处切平面的法向量可以取为 $\nabla F|_{P_0}=(1,2,1)$，

切平面为 $1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+1\cdot(z+2)=0$，即 $x+2y+z=2$.

设经过直线 L 的平面束方程为 $x+y+z-1+\lambda(2x+y+4z-2)=0$，

即 $(2\lambda+1)x+(\lambda+1)y+(4\lambda+1)z-(2\lambda+1)=0$，

令其与切平面垂直，即 $(2\lambda+1,\lambda+1,4\lambda+1)\cdot(1,2,1)=8\lambda+4=0$，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，

所以切平面上的投影直线的方程为 $\begin{cases}x+2y+z=2,\\ y-2z=0.\end{cases}$

13. **Solution**. 由题意可知曲面 Σ 的方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$，

$\nabla\left(3(x^2+z^2)+2y^2\right)|_P=(6x,4y,6z)|_P=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$.

所以 Σ 在点 $P\left(0,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ 处指向外侧的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\left(0,\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

又 $\nabla u=(-3z+2x,2y,4z^3-3x)$，所以 $\nabla u|_P=\left(-3\sqrt{2},2\sqrt{3},8\sqrt{2}\right)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\nabla u|_P\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\cdot 2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{15}}{5}\cdot 8\sqrt{2}=2\sqrt{30}.$

14. **Solution**. 因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}\cdot\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0),$$

因此函数 $f(x,y)$ 在原点处连续.

又 $f(x,0)=f(0,y)\equiv 0$，所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，因此函数 $f(x,y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{|xy|}\sin\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

当 $y=x, x\to 0, y\to 0$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{|xy|}\sin\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$，函数 $f(x,y)$ 在原点处不可微.

15. **Solution**. 考虑距离平方函数

$$f(x,y,z) = \left|\overrightarrow{P_0P}\right|^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

若 P 是 S 上使得 $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|$ 最小的点，则等价于 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下取得最小值.

由于曲面光滑，根据 Lagrange 乘数法，存在实数 λ 使得在点 P 处

$$\nabla f = \lambda \nabla \varphi,$$

其中 $\nabla f = 2(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 2\overrightarrow{P_0P}$，于是得到 $\overrightarrow{P_0P} = \dfrac{\lambda}{2}\nabla\varphi$.

注意到 $\nabla\varphi$ 即为曲面 S 在点 P 处的一个法向量，上式表明 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\nabla\varphi$ 平行，

所以 $\overrightarrow{P_0P}$ 必然也是曲面 S 在点 P 处的法向量.