CHAPTER 1

2022-2023 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 在空间直角坐标系中，方程 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$ 表示（　　）.

A. 半球面　　**B.** 柱面

C. 锥面　　**D.** 单叶双曲面

2. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处有 $f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$，则必有（　　）.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)$ 存在

B. $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

C. $\lim\limits_{x\to 1} f(x,1)$ 及 $\lim\limits_{y\to 1} f(1,y)$ 都存在

D. $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数存在

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$（　　）.

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　**B.** 不是 $f(x,y)$ 的驻点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　**D.** 是 $f(x,y)$ 的极小值点

4. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平行 $z=1$ 所围成的空间区域，将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 化为柱坐标系下的累次积分，下列结果正确的是（　　）.

A. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

B. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

C. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

D. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r$

5. 设 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geq 0, R>0)$，$abc\neq 0$，则 $\iint\limits_S (ax+by+cz)\mathrm{d}S=$（　　）.

A. $c\pi R^2$

B. $\frac{1}{4}c\pi R^3$

C. $c\pi R^3$

D. $(a+b+c)\pi R^2$

6. 下列命题中，正确的是（　　）.

A. 若 $a_n\leq b_n\leq c_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

B. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛

2　填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$，则 $\oint_\Gamma (x^2+2y^2+3z)\,\mathrm{d}s=$ __________.

8. $z=x+3y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 的切平面方程为 __________.

9. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u)\Big|_{(1,-1,2)}=$ __________.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leq x<0,\\ 1, & x=0,\\ 2x, & 0<x<\pi\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x=-3\pi$ 处的值为 __________.

3　基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求过点 $P(2,1,3)$ 且与 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 垂直的平面方程，并求该平面与 L_1 的交点.

12. 设 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{y}{x}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\pi)}$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(2,\pi)}$.

13. 求曲面 $z=xy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内的那部分面积 S.

14. 求 $I=\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $\begin{cases} y^2+\dfrac{z^2}{2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面所围成的立体.

15. 设 S 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,(R>0)$，取上侧，求 $I=\displaystyle\iint\limits_{S}\dfrac{(x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

16. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设 L 是 xOy 面上任意的光滑曲线，$f(x)$ 具有二阶连续的导数，且 $f(0)=4$，$f'(0)=3$，若曲线积分 $\int_L(-xe^x+f''(x))y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$.

18. 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\leq 4\}$ 上的最大值和最小值.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，证明：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2$.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+u_n}$，其中 $u_n>0$，$\{a_n\}$ 有上界，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

CHAPTER 2

2022-2023 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.

   方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 等价于

   $$x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \geq 0,$$

   表示单叶双曲面的上半部分.

2. **Solution**. C.

   多元函数偏导存在无法保证函数连续，全微分 $\mathrm{d}z = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y$ 仅在函数可微时成立，

   偏导数存在不能保证沿任意方向的方向导数存在.

   对于 C 选项，$f(x, 1)$ 是 x 的一元函数，由 $f_x(1, 1)$ 存在知该一元函数在 $x = 1$ 处可导，必然连续，

   即 $\lim\limits_{x \to 1} f(x, 1) = f(1, 1)$ 存在；同理 $\lim\limits_{y \to 1} f(1, y)$ 也存在.

3. **Solution**. D.

   由题可知 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(x^2 + \dfrac{3}{2}y^2\right)$，所以 $z = x^2 + \dfrac{3}{2}y^2 + C$，因此 $f(x, y)$ 显然在 $(0, 0)$ 处可微，且

   $$f_x(0, 0) = 2x\big|_{(0,0)} = 0, \quad f_y(0, 0) = 3y\big|_{(0,0)} = 0,$$

   所以点 $(0, 0)$ 是驻点. 又 $f_{xx}(0, 0) = 2$，$f_{yy}(0, 0) = 3$，$f_{xy}(0, 0) = 0$，所以

   $$f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 6 > 0,$$

   因此点 $(0, 0)$ 是极小值点.

4. **Solution**. B.

   由柱坐标代换

   $$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

   可得

   $$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\, \mathrm{d}r \int_r^1 f(\sqrt{r^2 + z})\, \mathrm{d}z.$$

5. **Solution**. C.

由对称性可知
$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S y\,\mathrm{d}S = 0,$$
故 $\iint\limits_S (ax+by+cz)\mathrm{d}S = c\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S.$

用球坐标代换，$\mathrm{d}S = R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$，因此
$$\begin{aligned} c\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S &= c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\varphi R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= c\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= c\pi R^3\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= c\pi R^3. \end{aligned}$$

6. **Solution**. A.

对于 A 选项，根据已知条件 $a_n \le b_n \le c_n$，可知 $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$.

令 $u_n = b_n - a_n$，$v_n = c_n - a_n$，则 $v_n \ge u_n \ge 0$ 均为正项级数的通项.

因为 $\sum a_n$ 和 $\sum c_n$ 都收敛，它们的差级数 $\sum v_n = \sum(c_n - a_n)$ 也必然收敛，

根据正项级数的比较判别法，由于 $\sum v_n$ 收敛，所以 $\sum u_n$ 也收敛.

因 $b_n = u_n + a_n$，而 $\sum u_n$ 和 $\sum a_n$ 都是收敛级数，所以它们的和级数 $\sum b_n$ 必然收敛.

对于 B 选项，令 $a_n = \dfrac{1}{n}$，显然 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+1} < 1$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

对于 C 选项，令 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{(-1)^n\sqrt{n}}\right) = 1$，

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

对于 D 选项，令 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. 2π.

显然曲线 Γ 具有轮换对称性，因此
$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s,$$
$$\oint_\Gamma x\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z\,\mathrm{d}s = 0.$$

从而
$$\oint_\Gamma (x^2+2y^2+3z)\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s + \oint_\Gamma (x+y+z)\,\mathrm{d}s = 2\pi.$$

8. **Solution**. $x+3y-z=0$.

由 $z=x+3y+\ln(1+x^2+y^2)$ 可得

$$z_x=1+\frac{2x}{1+x^2+y^2},\qquad z_y=3+\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

因此

$$z_x(0,0)=1,\qquad z_y(0,0)=3.$$

曲面在点 $(0,0,0)$ 处切平面的法向量可取作 $(z_x(0,0),z_y(0,0),-1)=(1,3,-1)$，因此切平面方程为

$$x+3y-z=0.$$

9. **Solution**. $\frac{1}{6}$.

$$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2).$$

因此 $\mathbf{grad}u=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$，所以

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

代入 $(1,-1,2)$ 得

$$\Delta u=\frac{1}{1+1+4}=\frac{1}{6}.$$

10. **Solution**. $\frac{\pi}{2}$.

因为

$$-3\pi\equiv-\pi\equiv\pi\pmod{2\pi},$$

根据 Dirichlet 收敛定理可知

$$S(-3\pi)=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{2\pi+(-\pi)}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 与直线

$$L_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

垂直的平面法向量可取 $(2,1,-1)$. 过点 $P(2,1,3)$ 的平面方程为

$$2(x-2)+(y-1)-(z-3)=0,$$

即

$$2x+y-z-2=0.$$

将

$$x=2t+1,\quad y=t+2,\quad z=-t+2$$

代入该平面方程，可得 $t=0$，故交点为 $(1,2,2)$.

12. **Solution**. 先求

$$z_y = \mathrm{e}^{-x}\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos\frac{y}{x}.$$

所以

$$z_y(2,\pi) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

再对 x 求偏导，可得

$$z_{yx} = \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{x+1}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

在 $(2,\pi)$ 处，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$，故

$$z_{yx}(2,\pi) = \frac{\pi}{8\mathrm{e}^2}.$$

13. **Solution**. 曲面面积为

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由于 $z=xy$，故

$$z_x = y, \qquad z_y = x.$$

所以

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

用极坐标代换，

$$S = 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

14. **Solution**. 绕 z 轴旋转后得到椭球体

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{2}\le 1.$$

对固定 z，截面是圆

$$x^2+y^2\le 1-\frac{z^2}{2},$$

因而

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} z^2\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\le 1-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} z^2\left(1-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z = \frac{8\sqrt{2}\pi}{15}.
\end{aligned}$$

15. **Solution**. 上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 上满足 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$，因此

$$I = \frac{1}{R}\iint\limits_{S}\left(x^2+y\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

记 S' 为 $x^2+y^2\le R^2, z=0$ 取下侧，$\Sigma = S\cup S'$，则

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{R}\left(\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{S'}\left(x^2+y\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\\
&= \frac{1}{R}\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le R^2\\ z\ge 0}}(2x+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{R}\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\le R^2\\ z\ge 0}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi R^2}{3}.
\end{aligned}
$$

16. **Solution**. 令 $y=x^2$，则级数化为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}y^n$.

用比值判别法，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)} = 0,
\end{aligned}
$$

故级数关于 y 的收敛半径为 $R_y=+\infty$，关于 x 的收敛半径也为 $R_x=+\infty$，即收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

下面求和函数 $S(x)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

其中

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(n-1)!}=x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^k}{k!}=x^2\mathrm{e}^{x^2},\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n!}-1=\mathrm{e}^{x^2}-1.
\end{aligned}
$$

所以

$$S(x)=(2x^2+1)e^{x^2}-1.$$

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 记

$$P(x,y)=(-x\mathrm{e}^x+f''(x))y,\qquad Q(x,y)=f(x).$$

由曲线积分与路径无关得 $P_y=Q_x$，即

$$-x\mathrm{e}^x+f''(x)=f'(x).$$

于是

$$f''(x)-f'(x)=x\mathrm{e}^x.$$

上述方程对应的齐次微分方程的特征方程为 $r^2-r=0$，其根为 $r=0$ 和 $r=1$，

因此齐次方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^x$.

$r=1$ 是该特征方程的单根，故可设非齐次方程的特解为 $f^*(x)=x(ax+b)\mathrm{e}^x$，

代入得 $(2ax+2a+b)\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x$，比较系数可得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$，因此非齐次方程的通解为

$$f(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^x+\left(\frac{1}{2}x-1\right)x\mathrm{e}^x.$$

将 $f(0)=4$，$f'(0)=3$ 代入可得 $\begin{cases}C_1+C_2=4,\\ C_2-1=3\end{cases}$，解得 $C_1=0$，$C_2=4$，因此

$$f(x)=4\mathrm{e}^x+\left(\frac{1}{2}x-1\right)x\mathrm{e}^x.$$

18. **Solution**. 在区域内部令 $\begin{cases}f_x=2x=0,\\ f_y=-2y=0\end{cases}$，解得唯一驻点 $(0,0)$，且 $f(0,0)=2$.

在边界 $4x^2+y^2=4$ 上有 $y^2=4-4x^2$，代入原函数得

$$f=x^2-(4-4x^2)+2=5x^2-2,\qquad -1\le x\le 1.$$

所以边界上最大值为 3，最小值为 -2. 比较可知 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 3，最小值为 -2.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. **法一**. 记 $f(x)$ 的一个原函数为

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 $F(0)=0$, $F(1)=A$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y&=\int_0^1 f(x)\left(F(1)-F(x)\right)\,\mathrm{d}x\\&=A\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}F(x)\\&=A^2-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}A^2.\end{aligned}$$

法二. 交换积分次序，有

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x.$$

将右端的积分变量 x,y 对换，得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{2}A^2.\end{aligned}$$

法三. 记

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

由于被积函数 $f(x)f(y)$ 关于 x,y 对称，

积分区域 $\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ 与 $\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}$ 面积相同且无公共内点，因此

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(y)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}x.$$

将两个积分相加，并合并积分区域为正方形 $[0,1]\times[0,1]$，得

$$2I=\iint\limits_{[0,1]^2} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y\right)=A\cdot A=A^2.$$

因此

$$I=\frac{1}{2}A^2.$$

20. **Proof**. 由递推关系 $2a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+u_n}$ 可得

$$u_n=4a_{n+1}\left(a_{n+1}-a_n\right).$$

由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\sqrt{a_n^2+u_n}\right)$ 可得 $a_{n+1}\ge a_n$，又 a_n 有上界，所以 $\{a_n\}$ 收敛.

注意到

$$0<\frac{u_n}{4}=a_{n+1}^2-a_na_{n+1}\le a_{n+1}^2-a_n^2,$$

因为 $\{a_n\}$ 收敛，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2-a_1^2$ 收敛，

由正项级数的比较判别法，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.