CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分（B）（上）期末考试

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）.

   A. 无界的但不是无穷大量　　**B.** 无穷大量

   C. 有界的但不是无穷小量　　**D.** 无穷小量

2. 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$，则（　　）.

   A. 对任意正整数 n，有 $a_n < b_n$　　**B.** 对任意正整数 n，有 $b_n < c_n$

   C. 数列 $\{a_n \cdot c_n\}$ 发散　　**D.** 数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$，且 $f'''(x_0) > 0$，则（　　）.

   A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　**B.** $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

   C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　**D.** $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

4. 若 $f'(2x) = \mathrm{e}^{-x}$，且 $f(0) = 1$，则 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$（　　）.

   A. $3x - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C$　　**B.** $3x - 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C$

   C. $3x + 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C$　　**D.** $3x - 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C$

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x) < 0$，$f(0) = 0$，则（　　）.

   A. $f(2) < 2f(1)$　　**B.** $f(2) > 2f(1)$

   C. $2f(2) < f(1)$　　**D.** $2f(2) > f(1)$

6. 下列反常积分收敛的是（　　）.

   A. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$　　**B.** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

   C. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$　　**D.** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=4t-t^2 \end{cases}$ $(t\geq 0)$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)-3\right]=$ ____________.

8. 设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{3x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+2$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，则 $g'(2)=$ ________________.

9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$ ________________.

10. 连续曲线段 $y=\displaystyle\int_0^x \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t(0\leq x\leq \pi)$ 的弧长 $s=$ ________________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求曲线 $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}(x>1)$ 的渐近线.

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{2n+\frac{4}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{2n+\frac{n^2}{n}}\right)$.

13. 设方程 $\mathrm{e}^{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_1^y \sqrt{4-t^2}\mathrm{d}t=1$ 可以确定函数 $y=y(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{dx}\right|_{x=0}$.

14. 求方程 $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^x$ 的积分曲线 $y = y(x)$，使其在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y = x^3 - 3x + 1$ 在该点处的切线重合.

15. 设 $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2+2t}\,\mathrm{d}t$，求 $I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

16. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3|\mathrm{d}t (0 \leq x \leq 1)$，求 $f(x)$ 的最值.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 连续，且满足 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \tan x}{x} = 1$，$F(x) = \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$. 求 $F'(x)$，并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

18. 设曲线 $y = y(x)$ 是第一象限内的连续曲线，点 $A(0,1)B(1,0)$ 分别为曲线与 y 轴及 x 轴的交点. 点 $M(x,y)$ 为曲线 AB 上的任意一点，过 $M(x,y)$ 作 x 轴的垂线，与 x 轴交于点 C，O 为坐标原点，已知梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2}$[1]. 求 $y=y(x)$ 与 y 轴及 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}=0$, $f(2)=2\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$. 证明: 存在 $\xi\in(0,2)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，且 $|f''(x)|\le 1$，证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{24}.$$

[1] 此处有误，应改为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分（B）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. A.

   当 $x=\dfrac{1}{k\pi}, k\to\infty$ 时，$f(x)\equiv 0$；当 $x=\dfrac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}, k\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to\infty$，

   所以函数 $f(x)$ 无界，但不是无穷大量.

2. **Solution**. D.

   极限只描述数列在 n 趋近于无穷大时的行为，所以 A, B 错误；

   取 $a_n\equiv 0$，则 $a_n\cdot c_n\equiv 0$，数列 $\{a_n\cdot c_n\}$ 收敛，所以 C 错误；

   $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\cdot c_n = 1\cdot(+\infty)=+\infty$，数列 $\{b_n\cdot c_n\}$ 发散，所以 D 正确.

3. **Solution**. D.

   利用 Taylor 公式，$f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2}f'''(\xi)(x-x_0)^2=\dfrac{1}{2}f'''(\xi)(x-x_0)^2$，

   其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间，故易见 $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值.

   另一方面，

   $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f'''(\eta)(x-x_0)^3=\frac{1}{6}f'''(\eta)(x-x_0)^3,$$

   其中 η 介于 x 和 x_0 之间，故易见 $f(x_0)$ 既不是 $f(x)$ 的极大值，也不是 $f(x)$ 的极小值.

   由于 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，所以 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧变号，点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

4. **Solution**. C.

   方程 $f'(2x)=\mathrm{e}^{-x}$ 两边积分得 $f(2x)=-2\mathrm{e}^{-x}+C$，又因为 $f(0)=1$，所以 $C=3$，

   故 $f(2x)=-2\mathrm{e}^{-x}+3$，$f(x)=-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+3$. 所以 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x+4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C$.

5. **Solution**. A.

   $f(x)$ 是上凸的，所以 $\dfrac{f(0)+f(2)}{2}<f(1)$，即 $f(2)<2f(1)$.

6. **Solution**. D.

$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=+\infty$,

$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x}=\ln\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=+\infty$,

$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=2\sqrt{\ln x}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=+\infty$,

$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=1$，所以 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. 1.

计算 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2-t}{t}$，当 $x=2$ 时，$t=1$，$y=f(2)=3$，故 $f'(2)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=1$.

从而

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-3\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f(2)}{\frac{1}{n}}=f'(2)=1.$$

8. **Solution**. $\frac{1}{3}$.

令 $f(x)=2$ 得 $x=0$，$f'(x)=3\mathrm{e}^{-9x^2}$，所以 $g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3}$.

9. **Solution**. $\frac{\pi}{4-\pi}$.

设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=C$，则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+C\sqrt{1-x^2}$. 方程两边从 0 积分到 1，得

$$C=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+C\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}C,$$

解得 $C=\frac{\pi}{4-\pi}$.

10. **Solution**. 4.

$y'=\sqrt{\sin x}$，所以 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x$，

故

$$s=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=4.$$

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 当 $x\to 1^+$ 时，$y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}\to+\infty$，所以 $x=1$ 是曲线的竖直渐近线.

当 $x\to+\infty$ 时，$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=1$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{1-t}}-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{-\left(\sqrt{1-t}-1\right)}{t\sqrt{1-t}}=\lim_{t\to0^+}\frac{-\left(-\frac{1}{2}t\right)}{t}=\frac{1}{2},$$

所以 $y=x+\dfrac{1}{2}$ 是曲线的斜渐近线.

12. **Solution**. 由定积分的定义，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2n+\frac{4}{n}}+\cdots+\frac{1}{2n+\frac{n^2}{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{2+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{2+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\\
&= \int_0^1\frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

13. **Solution**. 方程 $\mathrm{e}^{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_1^y\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t=1$ 两边微分，得

$$
\mathrm{e}^{xy}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\mathrm{d}y=0,
$$

当 $x=0$ 时，$y=1$. 代入上式得 $\mathrm{d}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}y=0$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1$.

14. **Solution**. 齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=2$.

对于 $f(x)=2\mathrm{e}^x$，$\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设特解为 $y^*=Ax\mathrm{e}^x$，

代入方程得 $A(x+2)\mathrm{e}^x-3A(x+1)\mathrm{e}^x+2Ax\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x$，解得 $A=-2$，

所以非齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x$.

曲线 $y=x^3-3x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $(3x^2-3)\Big|_{x=0}=-3$，

所以有 $\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=1, \\ y'(0)=C_1+2C_2-2=-3 \end{cases}$，解得 $C_1=3$，$C_2=-2$.

因此满足条件的积分曲线为 $y=3\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x$.

15. **Solution**. 由题可知 $f(0)=0$，$f'(x)=\mathrm{e}^{-x^2+2x}$，所以

$$
\begin{aligned}
I=\int_0^1(x-1)^2f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x-1)^3\\
&= \frac{1}{3}f(x)(x-1)^3\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3\mathrm{e}^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

令 $u=-x^2+2x$，则 $\mathrm{d}u=(-2x+2)\,\mathrm{d}x=-2(x-1)\,\mathrm{d}x$，$(x-1)^2=-u+1$，所以

$$\begin{aligned}I=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3\mathrm{e}^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x=&-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^2\mathrm{e}^u\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{6}\int_0^1(-u+1)\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{6}\int_0^1(\mathrm{e}^u-u\mathrm{e}^u)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{6}\left[\mathrm{e}^u\Big|_0^1-(u-1)\mathrm{e}^u\Big|_0^1\right]\\&=\frac{1}{6}(\mathrm{e}-2).\end{aligned}$$

16. **Solution**.

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x(x^3-t^3)\,\mathrm{d}t+\int_x^1(t^3-x^3)\,\mathrm{d}t\\&=x^3t\Big|_0^x-\frac{t^4}{4}\Big|_0^x+\frac{t^4}{4}\Big|_x^1-x^3t\Big|_x^1\\&=\frac{3}{2}x^4-x^3+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

所以 $f'(x)=6x^3-3x^2=3x^2(2x-1)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$.

计算 $f(0)=\dfrac{1}{4}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{32}$，$f(1)=\dfrac{3}{4}$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{7}{32}$，最大值为 $\dfrac{3}{4}$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 当 $x=0$ 时，$F(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\tan x}{x}=1$ 可知 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-\tan x]=0$，结合 $f(x)$ 的连续性可知 $f(0)=0$，且

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=f'(0)-1=1,$$

所以 $f'(0)=2$. 当 $x\neq0$ 时，令 $u=xt$，则 $\mathrm{d}u=x\,\mathrm{d}t$，所以

$$F(x)=\int_0^1f(xt)\,\mathrm{d}t=\int_0^xf(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{x}=\frac{\int_0^xf(u)\,\mathrm{d}u}{x}.$$

当 $x\neq0$ 时，

$$F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^xf(u)\,\mathrm{d}u}{x^2},\quad F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\int_0^xf(u)\,\mathrm{d}u}{x}-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0)=1.$$

所以 $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^xf(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时，$F'(x)$ 显然连续，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=f'(0)-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0)=1,$$

因此 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 综上所述，$F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

18. **Solution**. 由题可知点 C 的坐标为 $(x,0)$，$S_{梯形OCMA}=\frac{1}{2}x(1+y)$，$S_{曲边三角形CBM}=\int_x^1 y\,\mathrm{d}x$，

所以 $\frac{1}{2}x(1+y)+\int_x^1 y\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$. 方程两边求导得 $\frac{1}{2}(1+y)+\frac{1}{2}x\cdot y'-y=\frac{1}{2}x^2$，即

$$y'-\frac{1}{x}y=x-\frac{1}{x}.$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned}
y&=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left(C+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&=x\left[C+\int\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]=x\left(C+x+\frac{1}{x}\right)\\
&=x^2+Cx+1.
\end{aligned}$$

将点 B 坐标 $(1,0)$ 代入得 $C=-2$，所以曲线 $y=y(x)$ 的解析式为 $y=x^2-2x+1$.

因此旋转体的体积 $V=\int_0^1 2\pi xy(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1 x\left(x^2-2x+1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}=0$ 可知 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=0$，结合 $f(x)$ 的连续性可知 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}=0$.

由积分中值定理，$\exists\eta\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，使得 $\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=f(\eta)\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{1}{2}f(\eta)$，

所以 $f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=f(\eta)$，由 Rolle 定理，$\exists\delta\in(\eta,2)$，使得 $f'(\delta)=0$.

再由 Rolle 定理即得 $\exists\xi\in\left(\frac{1}{2},\delta\right)\subset(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

20. **Proof**. 由 Taylor 公式，

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

其中 ξ 介于 x 和 $\dfrac{1}{2}$ 之间. 所以

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\int_0^1 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&\le \left|\int_0^1 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&\le \left|f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$