CHAPTER 1

2023-2024 学年微积分（一）（下）期中考试

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|$.

2. 已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，与 y 轴正向的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，且在 z 轴上的坐标是负的. $\overrightarrow{OB}=\left(1,-\sqrt{2},-1\right)$，求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

3. 求圆锥面 $2x^2+2y^2-z^2=0$ 与旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在 $P(1,1,2)$ 处的切线与法平面方程.

4. 设 $u = f(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，$z = z(x,y)$ 是由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 确定的隐函数，其中 $5z^2 - 4xz + 3y \neq 0$，又 $f_1'(0,0,1) = 2$，$f_2'(0,0,1) = 4$，$f_3'(0,0,1) = 1$，求 $\mathrm{d}u|_{(0,0)}$.

5. 设 $z = yf(x^2 - y^2)$，其中 f 可导，求 $\dfrac{1}{x}z_x + \dfrac{1}{y}z_y$.

6. 求积分 $I = \displaystyle\int_1^3 \mathrm{d}x \int_{x-1}^2 \sin y^2 \,\mathrm{d}y$.

7. 设平面区域 $D = \{(x,y) | -2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$，求二重积分 $I = \displaystyle\iint\limits_D \left(y\cos x + \sqrt{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

8. 设有直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0,\\ x-z+4=0\end{cases}$，平面 $\pi: x-4y-8z+12=0$，求直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程.

9. 将空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1\end{cases}$ 化为参数方程.

10. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{1-z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 若函数 $u=az^4-bxz+x^2+y^2$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(2,1,2)$ 的方向导数最大，求 a,b 的值，并求出最大方向导数.

12. 已知函数 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+2$，D 是由 $x+y=3$，$x=0$，$y=0$ 所围成的平面区域，求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

13. 设 $z(x,y)=x^y+\int_0^x x\mathrm{e}^{-(y+t)^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}$.

14. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0,\\ 0, & x^4+y^2=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x,y)$ 在原点处的连续性、偏导数存在性及可微性.

15. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续且单调增加，其中 $b>0$，用**二重积分**证明:

$$b\int_0^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

CHAPTER 2

2023-2024 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 由题意可得

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - 2|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - 2. \end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2$.

$|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})^2} = \sqrt{|\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}.$

2. **Solution**. 设 α, β, γ 分别为 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角，

则由题意可得 $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 因 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，所以 $\cos\gamma = \pm\dfrac{1}{2}$，

又 $\overrightarrow{OA}$ 在 z 轴上的坐标是负的，所以 $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$. 从而 $\overrightarrow{OA} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{OB^0} = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $\dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB^0}}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB^0}|} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

即所求的 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. **Solution**. 设 $F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2$，$G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

法一. 因

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P = \left.\begin{vmatrix} 4y & -2z \\ 2y & -1 \end{vmatrix}\right|_P = -4y + 2yz|_P = 4 \neq 0,$$

所以方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y = y(x), z = z(x)$.

方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=2x^2+2y^2-z^2=0, \\ G(x,y,z)=x^2+y^2-z=0 \end{cases}$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} 4x+4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$ ，所以切线的方向向量可取为 $\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_P=(1,-1,0)$，

切线的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$，

法平面的方程为 $1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1)+0\cdot(z-2)=0$，即 $x-y=0$.

法二. $\nabla F=(4x,4y,-2z)$，$\nabla G=(2x,2y,-1)$，

取两个曲面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_F=\dfrac{1}{4}\nabla F|_P=(1,1,-1)$，$\boldsymbol{n}_G=\nabla G|_P=(2,2,-1)$，

所以切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_G=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(1,-1,0)$，

切线的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$，

法平面的方程为 $1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1)+0\cdot(z-2)=0$，即 $x-y=0$.

4. **Solution**. 方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 两边全微分，得

$$5z^4\,\mathrm{d}z-z^4\,\mathrm{d}x-4xz^3\,\mathrm{d}z+z^3\,\mathrm{d}y+3yz^2\,\mathrm{d}z=0,$$

将 $x=0,y=0,z=1$ 代入上式，得 $5\,\mathrm{d}z-\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0$. 所以

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u|_{(0,0)}&=f_1'\,\mathrm{d}x+f_2'\,\mathrm{d}y+f_3'\,\mathrm{d}z \\ &=2\,\mathrm{d}x+4\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}z \\ &=2\,\mathrm{d}x+4\,\mathrm{d}y+\frac{1}{5}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y) \\ &=\frac{11}{5}\,\mathrm{d}x+\frac{19}{5}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

5. **Solution**. 因为

$$z_x=yf'(x^2-y^2)\cdot 2x,\quad z_y=f(x^2-y^2)+yf'(x^2-y^2)\cdot(-2y),$$

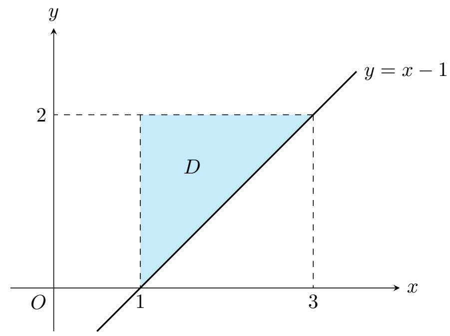
所以

$$\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y=2yf'(x^2-y^2)+\frac{f(x^2-y^2)}{y}-2yf'(x^2-y^2)=\frac{f(x^2-y^2)}{y}.$$

6. **Solution**.

积分区域 D 如右图所示. 交换积分次序得

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \mathrm{d}x \int_{x-1}^2 \sin y^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_1^{y+1} \sin y^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 y \sin y^2 \,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\cos y^2 \Big|_0^2 \\
&= -\frac{1}{2}\cos 4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos 4).
\end{aligned}$$

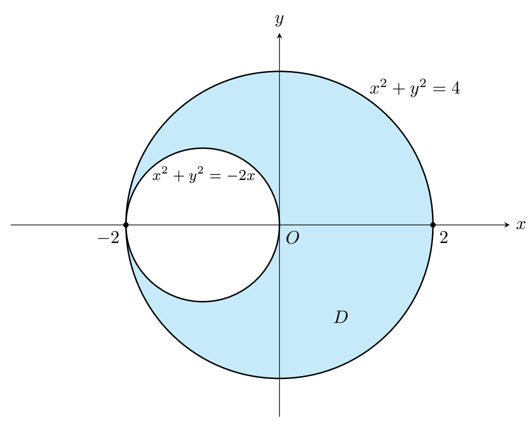


7. **Solution**. 由于积分区域 D 关于 x 轴对称，所以 $\displaystyle\iint_D y\cos x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

记 $D' = \{(x,y) | -2x \le x^2+y^2 \le 4, y \ge 0\}$，则 $I = 2\displaystyle\iint_{D'} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

用极坐标代换，则

$$\begin{aligned}
I &= 2\iint_{D'} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^2 \,\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-2\cos\theta}^2 r^2 \,\mathrm{d}r\right) \\
&= \frac{8}{3}\pi + \frac{16}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1+\cos^3\theta\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{16}{9}(3\pi - 2).
\end{aligned}$$



8. **Solution**. 设过直线 $L: \begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 的平面束方程为 $x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$，

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$.

令其与平面 $\pi: x-4y-8z+12=0$ 垂直，得

$$(1+\lambda)\cdot 1 + 5\cdot(-4) + (1-\lambda)\cdot(-8) = 0,$$

解得 $\lambda = 3$. 所以直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程为

$$\begin{cases} 4x+5y-2z+12=0, \\ x-4y-8z+12=0. \end{cases}$$

9. **Solution**. 在方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 中消去 y，得 $(x-1)^2+(z-1)^2=x^2+z^2$，

即 $x+z=1$. 将 $z=1-x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$，得曲线在 xOy 平面上的投影柱面方程：$2x^2-2x+y^2=0$，

即 $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=1$. 令 $\begin{cases} x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos\theta, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$，则 $z=1-x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta$，

故曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\theta, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \qquad (0 \le \theta < 2\pi) \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\theta. \end{cases}$$

10. **Solution**. 用截面法，

$$\begin{aligned} I = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{1-z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{e}^{1-z}\,\mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (D_z = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1-z\}) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2 \mathrm{e}^{1-z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^1 z^2 \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 z^2 \mathrm{d}\mathrm{e}^z = \frac{1}{2}\left(z^2\mathrm{e}^z\Big|_0^1 - \int_0^1 2z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z \right) \\ &= \frac{\mathrm{e}}{2} - \int_0^1 z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}}{2} - \int_0^1 z\,\mathrm{d}\mathrm{e}^z \\ &= \frac{\mathrm{e}}{2} - \left(z\mathrm{e}^z\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z \right) = \frac{\mathrm{e}}{2} - (\mathrm{e} - (\mathrm{e}-1)) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -bz + 2x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial z} = 4az^3 - bx$.

所以 $\nabla u|_P = (-bz+2x, 2y, 4az^3 - bx)\big|_{(1,1,1)} = (-b+2, 2, 4a-b)$.

由于函数沿梯度方向的方向导数最大，所以 $\nabla u|_P // \boldsymbol{l}$，有

$$\frac{-b+2}{2} = \frac{2}{1} = \frac{4a-b}{2},$$

解得 $a = \dfrac{1}{2}$，$b = -2$. 此时 $\nabla u|_P = (4,2,4)$，所以最大方向导数为 $|\nabla u|_P| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6$.

12. **Solution**. 先考虑 D 的内部. 令 $f'_x = 3x^2 - 2(x+y) = f'_y = 3y^2 - 2(x+y) = 0$，

解得唯一驻点 $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$，且

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{10}{27}.$$

考虑 D 的坐标轴边界. 由对称性不妨只考虑在 y 轴上时，

此时 $x = 0$，$f(x,0) = x^3 - x^2 + 2$，令 $\left(x^3 - x^2 + 2\right)' = 3x^2 - 2x = 0$，解得 $x = 0$ 或 $\dfrac{2}{3}$，且

$$f(0,0) = 2, \quad f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = f\left(0, \frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}.$$

再考虑 D 的斜边边界，即直线 $x + y = 3$，

此时 $f=x^3+(3-x)^3-7$，令 $\left(x^3+(3-x)^3-7\right)'=3x^2-3(3-x)^2=0$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$，且

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4},\quad f(3,0)=f(0,3)=20.$$

比较得函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 20，最小值为 $-\dfrac{10}{27}$.

13. **Solution**. 令 $u=y+t$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}t$，$\displaystyle\int_0^x x\mathrm{e}^{-(y+t)^2}\,\mathrm{d}t=x\int_y^{y+x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$.

所以

$$z(x,y)=x^y+x\int_y^{y+x}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}+\int_y^{y+x}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u+x\cdot\mathrm{e}^{-(y+x)^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(yx^{y-1}+\int_y^{y+x}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u+x\cdot\mathrm{e}^{-(y+x)^2}\right)\\&=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x+\mathrm{e}^{-(y+x)^2}-\mathrm{e}^{-y^2}+x\cdot\mathrm{e}^{-(y+x)^2}\cdot(-2)(y+x)\\&=x^{y-1}(1+y\ln x)+\mathrm{e}^{-(y+x)^2}(1-2x(y+x))-\mathrm{e}^{-y^2}.\end{aligned}$$

从而 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

14. **Solution**. 利用 $\left(x^2-y^2\right)^2\geq 0$ 可得 $\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right|\leq\dfrac{|x|}{2}$. 所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right|\leq\dfrac{|x|}{2}\to 0$，

由夹逼定理可知 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^3y}{x^4+y^2}=0=f(0,0)$，因此函数 $f(x,y)$ 在原点处连续.

又 $f(x,0)=f(0,y)\equiv 0$，所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，因此函数 $f(x,y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^3y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

当 $y=x^2,x\to 0,y\to 0$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^5}{2x^4\sqrt{x^2+x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2|x|\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$$

不存在，所以函数 $f(x,y)$ 在原点处不可微.

15. **Solution**. 记区域 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq b,0\leq y\leq b\}$，$I=b\displaystyle\int_0^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D f(x)\left(g(x)-g(y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意到区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，具有轮换对称性，所以

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D f(x)\left(g(x)-g(y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[\iint\limits_D f(x)\left(g(x)-g(y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_D f(y)\left(g(y)-g(x)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由于函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0,b]$ 上单调增加，所以 $\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\geq 0$，因此 $I\geq 0$，即

$$b\int_0^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$