CHAPTER 1

2023-2024 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 已知直线 $L_1: x+1=y=\dfrac{z-1}{2}$ 和 $L_2: x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{3}$，则这两直线的位置关系为（　　）.

   A. 相交　　**B.** 平行

   C. 重合　　**D.** 异面

2. 设函数 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$ 在点 $P(0,1,1)$ 附近满足方程 $F(x,y,z)=0$，则下列说法错误的是（　　）.

   A. F 在点 P 处可微　　**B.** $\left.\dfrac{\partial y}{\partial z}\right|_P=0$

   C. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_P=-2$　　**D.** $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|_P=\dfrac{1}{2}$

3. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\displaystyle\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}\sigma=$（　　）.

   A. $2\displaystyle\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma$　　**B.** $2\displaystyle\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma$

   C. $\displaystyle\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}\sigma$　　**D.** 0

4. 已知函数 $f(x)=1-x(0\le x\le\pi)$，$S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\,(-\infty<x<\infty)$，其中 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x(n=1,2,\ldots)$，则 $S\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=$（　　）.

   A. $-\dfrac{\pi}{2}-1$　　**B.** $-\dfrac{\pi}{2}+1$

   C. $\dfrac{\pi}{2}-1$　　**D.** $\dfrac{\pi}{2}+1$

5. 设 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_\Gamma (y+2z)\,\mathrm{d}s=($　　$)$．

A. π　　**B.** 2π

C. $-\pi$　　**D.** 0

6. 关于级数的描述，下列命题中正确的是（　　）．

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n}$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$，则 $\oint\!\!\!\oint_S \left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}S=$__________.

8. 曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ 2x^2+2y^2-z^2=0 \end{cases}$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 的法平面方程为__________.

9. 设 $\{x^{2023}+2xy^3, ax^2y^2-y^{2024}\}$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的梯度，则 $a=$__________.

10. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n+1}$ 的和函数为__________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 一直线过点 $B(1,2,3)$ 且与向量 $\boldsymbol{s}=(6,6,7)$ 平行，求点 $A(3,4,2)$ 到此直线的距离 d.

12. 设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}$，求 $\mathrm{d}z$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}$.

13. 求曲线积分 $I=\displaystyle\int_L (y^2-\cos y)\,\mathrm{d}x+x\sin y\,\mathrm{d}y$，其中有向曲线 L 为沿着正弦曲线 $y=\sin x$，由点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$.

14. 求由曲面 $2z=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体 Ω 的体积 V.

15. 设 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的闭曲面的外侧，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 S 外法线的方向余弦，求

$$I=\oiint\limits_S[(x^3+z^2)\cos\alpha+(y^3+x^2)\cos\beta+(z^3+y^2)\cos\gamma]\mathrm{d}S.$$

16. 设 $f(x)=\dfrac{1}{(4-x)^2}$，将 $f(x)$ 展开成关于 x 的幂级数，并求 $f^{(20)}(0)$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，空间曲线 $L: x=t, y=2t^2, z=-2t^4$，$P_0(1,2,-2)$ 为曲线 L 上的一点，求 u 在 P_0 处沿曲线 L 的切向量方向（t 增大的方向）$\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$，并求函数 u 在 $P_0(1,2,-2)$ 处的最大变化率.

18. 设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}f(x,y)=(2ax+by)\,\mathrm{d}x+(2by+ax)\,\mathrm{d}y$（$a,b$ 为常数），且 $f(0,0)=-3$，$f_x'(1,1)=3$，求点 $(-1,-1)$ 到曲线 $f(x,y)=0$ 上的点的距离的最大值.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，证明：$1\le \displaystyle\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le 2$.

20. 设 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}(n=2,3,\cdots)$，证明：$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛.

CHAPTER 2

2023-2024 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. A.

   显然 L_1 与 L_2 不平行、重合. 联立

   $$L_1:(x,y,z)=(-1,0,1)+t(1,1,2),\qquad L_2:(x,y,z)=(0,-1,2)+s(1,3,3)$$

   解得 $\begin{cases} s=1, \\ t=2 \end{cases}$，所以两直线相交于点 $(1,2,5)$.

2. **Solution**. C.

   在 $P(0,1,1)$ 处，

   $$F_x=2,\qquad F_y=-1,\qquad F_z=0.$$

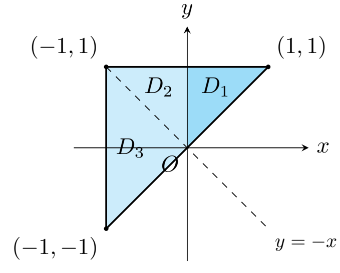
   因为 $F_y\neq 0$，可把 y 看作 x,z 的函数，且

   $$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}=2.$$

   故选项 C 中的 -2 错误.

3. **Solution**. A.
   如图，用直线 $y=-x$ 将三角形区域 D 分为 D_2 和 D_3，
   则由对称性可知

   $$\begin{aligned}\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{D_2}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}\sigma \\ &\quad+\iint\limits_{D_3}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}\sigma \\ &=\iint\limits_{D_2}\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma \\ &=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$



4. **Solution**. C.

该正弦级数表示函数 $f(x) = 1 - x\ (0 \le x \le \pi)$ 的奇延拓. 因而

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

5. **Solution**. D.

由轮换对称性可知

$$\oint_\Gamma x\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma y\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma z\,\mathrm{d}s$$

所以

$$\oint_\Gamma (y + 2z)\,\mathrm{d}s = \oint_\Gamma (x + y + z)\,\mathrm{d}s = 0.$$

6. **Solution**. D.

对于 A 选项，考虑 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum u_n$ 收敛，但 $u_n^2 = \dfrac{1}{n}$，$\sum u_n^2$ 发散；

对于 B 选项，考虑 $u_n = \dfrac{1}{n}$，则 $\sum u_n^2 = \sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\sum u_n$ 发散；

对于 C 选项，考虑 $u_n = (-1)^n$，$v_n = (-1)^{n-1}$，则 $\sum (u_n + v_n) \equiv 0$ 收敛，但 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 均发散；

但 $\sum u_{2k} = \sum \dfrac{1}{2k}$ 与 $\sum u_{2k-1} = \sum \dfrac{1}{2k-1}$ 均发散；

对于 D 选项，若 $\sum a_n^2$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \le \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) < \infty,$$

因而 $\sum \dfrac{|a_n|}{n}$ 收敛.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\dfrac{13\pi R^4}{9}$.

由对称性可知

$$\oiint_S x^2\,\mathrm{d}S = \oiint_S y^2\,\mathrm{d}S = \oiint_S z^2\,\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\oiint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S.$$

又球面上 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，而 $|S| = 4\pi R^2$，所以

$$\oiint_S x^2\,\mathrm{d}S = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

因而

$$\iint_S \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{4\pi R^4}{3} = \frac{13\pi R^4}{9}.$$

8. **Solution**. $x - y = 0$.

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$，$G(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2$，则两曲面的法向量可取为

$$\nabla F = (2x, 2y, -1), \qquad \nabla G = (4x, 4y, -2z).$$

在 $P_0(1,1,2)$ 处切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{s}=\nabla F\times\nabla G=(2,2,-1)\times 4(1,1,-1)=4(-1,-1,0)$，因此法平面方程为

$$x-y=0.$$

9. **Solution**. 3.

记 $P=x^{2023}+2xy^3$，$Q=ax^2y^2-y^{2024}$，则 $\mathbf{grad}u(x,y)=\{P,Q\}$ 等价于 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$，所以

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^{2023}+2xy^3)=\frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2-y^{2024}),$$

即

$$6xy^2=2axy^2.$$

因此 $a=3$.

10. **Solution**. $x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^n}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 计算

$$\overrightarrow{BA}=(2,2,-1),\qquad |\boldsymbol{s}|=\sqrt{6^2+6^2+7^2}=\sqrt{121}=11.$$

则点到直线的距离为

$$\begin{aligned}d=\frac{|\overrightarrow{BA}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}&=\frac{|(2,2,-1)\times(6,6,7)|}{11}\\&=\frac{|4(1,-1,0)|}{11}=\frac{20\sqrt{2}}{11}.\end{aligned}$$

12. **Solution**. 由链式法则，

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}\cdot\frac{-\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=(2x-y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}},\\\frac{\partial z}{\partial y}&=2y\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}\cdot\frac{\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=(2y+x)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}.\end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}\left[(2x-y)\,\mathrm{d}x+(2y+x)\,\mathrm{d}y\right].$$

由 $z_x(x,y)=(2x-y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}$ 可知 $z_x(0,y)=-y\cdot\mathrm{e}^{-\arctan 0}=-y$，所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$.

13. **Solution**. 设

$$P=y^2-\cos y,\qquad Q=x\sin y.$$

将曲线 L 与有向线段 AO 补成闭曲线，围成区域记为 D. 由 Green 公式，

$$\oint_{L+AO}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=-\iint_D(Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

因为

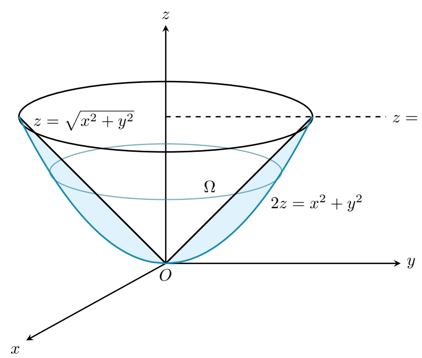
$$Q_x - P_y = \sin y - (2y + \sin y) = -2y,$$

故

$$\begin{aligned} I &= 2\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\pi^0 (-1)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} y\,\mathrm{d}y - \pi \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x - \pi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

14. **Solution**. 联立 $2z = x^2 + y^2$ 与 $z = \sqrt{x^2+y^2}$，得 $z = 0$ 或 $z = 2$，

所以 Ω 在 xOy 平面上的投影为圆盘 $D: x^2 + y^2 \le 4$，积分区域 Ω 如图所示. 用柱坐标代换，



$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\frac{r^2}{2}}^r \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \left(r - \frac{r^2}{2}\right) r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

15. **Solution**. 记 S 所围成的区域为 Ω. 由 Gauss 公式，

$$\begin{aligned} I &= \oiint\limits_S [(x^3+z^2)\cos\alpha + (y^3+x^2)\cos\beta + (z^3+y^2)\cos\gamma]\mathrm{d}S \\ &= \oiint\limits_S \left(x^3+z^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(y^3+x^2\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(z^3+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iiint\limits_\Omega \left[3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

用球坐标代换，

$$\begin{aligned} I &= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{6\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{6\pi}{5}(1 - \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)\pi}{5}. \end{aligned}$$

16. **Solution**. 由

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^\infty t^n, \qquad |t| < 1,$$

令 $t = \dfrac{x}{4}$，并对两边求导，得

$$\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^\infty (n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n, \qquad |x| < 4.$$

因此

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n+1}{4^{n+2}},$$

所以

$$f^{(20)}(0)=\frac{21!}{4^{22}}.$$

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 点 $P_0(1,2,-2)$ 对应参数 $t=1$. 曲线 L 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=(1,4,-8),\qquad \boldsymbol{\tau}_0=\frac{1}{9}(1,4,-8).$$

计算

$$\nabla u=\left(\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

在 P_0 处

$$\nabla u(P_0)=\left(\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right).$$

因而沿切线方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\nabla u(P_0)\cdot\boldsymbol{\tau}_0=\left(\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right)\cdot\frac{1}{9}(1,4,-8)=-\frac{16}{243}.$$

最大变化率即

$$|\nabla u(P_0)|=\frac{1}{27}\sqrt{8^2+2^2+2^2}=\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

18. **Solution**. 由题意

$$f_x=2ax+by,\qquad f_y=2by+ax.$$

因为 $f_{xy}=f_{yx}$，故 $a=b$. 又

$$f_x(1,1)=2a+b=3,$$

所以 $a=b=1$. 于是

$$\mathrm{d}f=(2x+y)\,\mathrm{d}x+(x+2y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2+xy+y^2),$$

并由 $f(0,0)=-3$ 得

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-3.$$

曲线 $f(x,y)=0$ 即

$$x^2+xy+y^2=3.$$

在曲线 $f(x,y)=0$ 上任取一点 (x,y)，则 $(-1,-1)$ 到该点的距离为 $d=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$.

用 Lagrange 乘数法，设 $F(x,y,\lambda)=(x+1)^2+(y+1)^2+\lambda(x^2+xy+y^2-3)$，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x+1)+\lambda(2x+y)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y+1)+\lambda(x+2y)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+xy+y^2-3=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$，$\begin{cases}x=-1,\\ y=-1,\end{cases}$，$\begin{cases}x=-1,\\ y=2,\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$

计算 $d(1,1)=2\sqrt{2}$，$d(-1,-1)=0$，$d(2,-1)=3$，$d(-1,2)=3$，所以最大值为 3.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由轮换对称性，

$$\iint\limits_D \cos y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_D \cos x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

所以

$$\iint\limits_D (\cos y^2 + \sin x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_D (\cos x^2 + \sin x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sqrt{2} \iint\limits_D \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

当 $0 \le x \le 1$ 时，

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \le 1.$$

所以

$$\iint\limits_D \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \le \iint\limits_D \sqrt{2} \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \le \iint\limits_D \sqrt{2} \cdot 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

$$1 \le \iint\limits_D (\cos y^2 + \sin x^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \le \sqrt{2}.$$

20. **Proof**. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{-\frac{1}{2}}$,

利用 Taylor 公式 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

由于 $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 都收敛，所以 $\sum a_n$ 收敛.