CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分（B）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+\sqrt{n}}\right)$.

2. 求极限 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\tan x}}{\ln(1+\sin^3 x)}$.

3. 设 $y = \arctan \mathrm{e}^x - \ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}}$，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}$.

4. 已知曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}, \end{cases}$ ，求该曲线在对应 $t=1$ 的点 P 处的切线方程.

5. 求当 $x \to 0$ 时，无穷小量 $u = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 的主部和阶数.

6. 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + \mathrm{e}^{nx}}{1 + \mathrm{e}^{nx}}$ 的连续性，若有间断点，指出其类型.

7. 试确定常数 a, b，使得 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(1+x)^4+3} - (a+bx)}{x} = 0$.

8. 已知函数 $y = f(\sin^2 x)$，其中 $f(u)$ 二阶可导，求 y''.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}x^n\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$，要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求正整数 n 的取值范围.

10. 设 $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$，求 $f^{(6)}(0)$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=1+\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^3}{6}$ 与 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

12. 设 $f(x)$ 定义于 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)\neq 0$. 若任给 x,y 总有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)=\lambda$，讨论 $f(x)$ 的可导性，并求 $f(x)$.

13. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=2$，求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

14. 设函数 $f(u)$ 二阶可导且 $f'(u)\neq 0$，若 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(\ln x)$ 的反函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

15. 利用不等式 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，研究数列 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 的收敛性.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设常数 $\alpha>1$，证明方程 $\alpha x=\tan x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且 $f(0)=f(1)=0, f(\theta)=1, \theta\in(0,1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)+\xi=1$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分（B）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 记和式 $\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+\sqrt{n}}$ 为 A_n，因为

$$\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2+\sqrt{n}}<A_n<\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n+1)}{n^2+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n+1)}{n^2+1}=\dfrac{1}{2}$，由夹逼准则得

$$l=\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{1}{2}.$$

2. **Solution**.

$$\begin{aligned} l=&-\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{\tan x-x}-1}{\sin^3 x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\\ =&-\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. **Solution**. 由题意

$$y=\arctan\mathrm{e}^x-x+\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x}),$$

故

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x-1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x,$$

因而

$$\mathrm{d}y\big|_{x=1}=\frac{\mathrm{e}-1}{1+\mathrm{e}^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. **Solution**. 对应 $t=1$ 的点 P 为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{6t(1+t^3)-9t^4}{(1+t^3)^2}}{\frac{3(1+t^3)-9t^3}{(1+t^3)^2}}=\frac{2t-t^4}{1-2t^3}.$$

曲线在点 P 的切线斜率为 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=-1$，故切线方程为

$$y-\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)\quad \text{或}\quad x+y=3.$$

5. **Solution**.

法一. 设 u 的主部为 $cx^k(c \neq 0, k > 0)$，则有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{cx^k}=1.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{cx^k}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+x\arcsin x}{cx^k(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}\\&=\frac{1}{2c}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+x\arcsin x}{x^k}\\&=\frac{1}{2c}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+x^2}{x^k}=\frac{3}{4c}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^k},\end{aligned}$$

要使 $\dfrac{3}{4c}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^k}=1$，必有 $k=2, c=\dfrac{3}{4}$.

因此，无穷小量 $u=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 的主部为 $\dfrac{3}{4}x^2$，阶数为 2.

法二. 当 $x\to0$ 时，

$$\begin{aligned}u&=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}\\&=\frac{1-\cos x+x\arcsin x}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}\\&\sim\frac{1}{2}(1-\cos x+x\arcsin x)\\&\sim\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+x^2\right)=\frac{3}{4}x^2.\end{aligned}$$

因此，无穷小量 $u=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 的主部为 $\dfrac{3}{4}x^2$，阶数为 2.

6. **Solution**. 当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{nx}=0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}=x$；

当 $x=0$ 时，$f(0)=\dfrac{1}{2}$；

当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx}=0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}+1}{\mathrm{e}^{-nx}+1}=1$.

因此 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ x, & x<0\end{cases}$，在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续.

因 $f(0^-)=0$，$f(0^+)=1$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

7. **Solution**. 由题意知 $\sqrt{(1+x)^4+3}-(a+bx)=o(x)$，$(x\to0)$.

首先，$\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{(1+x)^4+3}-(a+bx)\right)=0$，计算极限可得 $a=2$.

其次，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{(1+x)^4+3}-(2+bx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{(1+x)^4+3}-2}{x}-b\right)=0$，

可得 $b=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{(1+x)^4+3}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^4-1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)^4+3}+2}=1$.

8. **Solution**.$y' = f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x = f'(\sin^2 x)\cdot \sin 2x$,

$y'' = f''(\sin^2 x)\cdot \sin^2 2x + 2\cos 2x \cdot f'(\sin^2 x)$.

9. **Solution**. 要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必有 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

要使 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}\cos\dfrac{1}{x}$ 存在，必有 $n>1$，此时 $f'(0)=0$.

$x\neq 0$ 时，$f'(x) = nx^{n-1}\cos\dfrac{1}{x} + x^{n-2}\sin\dfrac{1}{x}$. 当 $n>1$ 时，

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\cos\frac{1}{x} + x^{n-2}\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x^{n-2}\sin\frac{1}{x},$$

欲使上式极限为 0，必有正整数 $n>2$.

综上所述，当且仅当正整数 $n>2$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

10. **Solution**. 因为 $f(x) = 1-2\cos^2 x\sin^2 x = 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$,

所以

$$f^{(6)}(x) = 4^5\cos\left(4x+\frac{6\pi}{2}\right) = -4^5\cos 4x,$$

$$f^{(6)}(0) = -1024.$$

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**. 当 $t=0$ 时，$x=1, y=1.x'_t = \dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{2}\neq 0$.

对方程 $\mathrm{e}^y\sin t - y + 1 = 0$ 两边关于 t 求导得

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin t + \mathrm{e}^y\cos t - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0,$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t},$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\mathrm{e}^y\cos t}{(1-\mathrm{e}^y\sin t)(1+t^2)},$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = \left.\frac{2\mathrm{e}^y\cos t}{(1-\mathrm{e}^y\sin t)(1+t^2)}\right|_{t=0} = 2\mathrm{e}.$$

12. **Solution**. 由条件 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 得 $f(0)=f^2(0)$，$f(x) = f^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

因 $f(x)\neq 0$，故 $f(x)>0$，$f(0)=1$.

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)f(y)-f(x)}{y}\\ &= f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y} = f(x)f'(0) = \lambda f(x).\end{aligned}$$

因此函数 $f(x)$ 处处可导，且 $f'(x)=\lambda f(x)$.

因为 $f'(x)-\lambda f(x)=0$，所以

$$(\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x))' = \mathrm{e}^{-\lambda x}f'(x) - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x) = 0,$$

从而 $\mathrm{e}^{-\lambda x}f(x)\equiv k$，由 $f(0)=1$ 得 $k=1$，$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}$.

13. **Solution**. 由题设条件得 $f(0)=0, f'(0)=0$.

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=1.\end{aligned}$$

所以

$$l=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

14. **Solution**.

法一. 因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{x}{f'(\ln x)}$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{x}{f'(\ln x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{f'(\ln x)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\\ &= \frac{f'(\ln x)-x\cdot\left(f''(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right)}{(f'(\ln x))^2}\cdot\frac{x}{f'(\ln x)}\\ &= \frac{x(f'(\ln x)-f''(\ln x))}{(f'(\ln x))^3}.\end{aligned}$$

法二. 对 $y=f(\ln x)$ 两边关于 y 求导得

$$1=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, \tag{$*$}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{f'(\ln x)}$.

式 $(*)$ 变形得 $x=f'(\ln x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，两边关于 y 再求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f'(\ln x)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+f''(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2,$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{f''(\ln x)}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}{f'(\ln x)}=\frac{x(f'(\ln x)-f''(\ln x))}{(f'(\ln x))^3}.$$

15. **Solution**. $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<0$,

因此数列 $\{x_n\}$ 单调减少.

$$\begin{aligned}x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n &> \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\ &= \ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

即数列 $\{x_n\}$ 有下界 0，由单调有界收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**. 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\alpha\cos x$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续.
因为 $f(0^+)=1-\alpha<0$，所以 $\exists x_1\in(0,\delta)$（δ 是足够小的正数），$f(x_1)<0$.
而 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}>0$，显然 $f(x)$ 在 $\left[x_1,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，由零点定理知存在 $\xi\in\left(x_1,\dfrac{\pi}{2}\right)$，
使得 $f(\xi)=0$ 即 $\alpha\xi=\tan\xi$，故方程 $\alpha x=\tan x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

17. **Proof**. 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(\theta)F(1)=-(1-\theta)<0$，
由零点定理可得，存在 $c\in(\theta,1)$，使得 $F(c)=0$.
再令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}F(x)$，因为 $G(0)=G(c)=0$，由 Rolle 定理得存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得 $G'(\xi)=0$.
注意到 $G'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-1-f(x)+x)$，因此有 $f'(\xi)-f(\xi)+\xi=1$.