CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分（B）（上）期末考试

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & x\neq 1, \\ 0, & x=1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处（　　）.

   A. 连续　　　　**B.** 右连续

   C. 左连续　　　　**D.** 左右都不连续

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=1$，则（　　）.

   A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　　　**B.** $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

   C. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值　　　　**D.** $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3. 微分方程 $y''-2y'+2y=e^x\sin x+e^{-x}$ 的特解形式应设为 $y^*=$（　　）.

   A. $xe^x(a\cos x+b\sin x)+ce^{-x}$　　　　**B.** $e^x(a\cos x+b\sin x)+ce^{-x}$

   C. $e^x(ax+b)\cos x+ce^{-x}$　　　　**D.** $e^x(a\cos x+b\sin x)+cxe^{-x}$

4. 设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数，点 $(c,f(c))(a<c<b)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点的一个充分条件为（　　）.

   A. $f''(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递增　　　　**B.** $f''(c)=0$

   C. $f''(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递减　　　　**D.** $f''(c)=0$ 且 $f''(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递减

5. 若函数 $f(x)$ 满足 $\mathrm{d}f(x)=-e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$（　　）.

   A. $e^{\cos x}-1$　　　　**B.** $e^{\sin x}$

   C. $e^{\sin x}-e$　　　　**D.** $e^{\cos x}-e$

6. 下列反常积分发散的是（　　）.

   A. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x$　　　　**B.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

   C. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x$　　　　**D.** $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. $\int_{-1}^{1}\left(x\ln\left(x^{2026}+1\right)+\sqrt{1-x^2}\right)\,\mathrm{d}x=$ ________________.

8. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\,(x>0)$ 的斜渐近线为 ________________.

9. 连续曲线段 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t(0\le x\le\pi)$ 的弧长 $s=$ ________________.

10. 设函数 $f(x)=\int_0^1|t-x|\mathrm{d}t(0<x<1)$，则 $y=f(x),x=0,x=1$ 以及 x 轴所围成的区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 ________________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(\cos x-1)}{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$.

12. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+2t^2,\\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u\end{cases}\quad(t>1)$ 确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=9}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$.

13. 若 $f(x)=ax^3+bx^2+x$ 在 $x=1$ 处取得极值 2，求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

14. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t$.

15. 求微分方程 $(y^2-6x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2y$ 的通解.

16. 在 xOy 平面内，把连接点 $O(0,0)$ 与点 $P(1,0)$ 的线段 OP 剖分为 n 等分，各分点依次记为 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$. 从点 $P_k,k=1,2,\cdots,n-1$ 引抛物线 $y=x^2$ 的切线，切点记为 $Q_k(x_k,x_k^2)$，设三角形 $\triangle Q_kP_kP$ 的面积为 S_k，求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}S_k$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

18. 已知曲线 L 的方程为 $y = f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1, l_2 分别是曲线 L 在 $(0,0)$ 和 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$，设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，求 $\displaystyle\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,\mathrm{d}x$.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geq 0$，$g'(x)\geq 0$，证明：对于任意的 $a\in[0,1]$，都有 $\displaystyle\int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \geq f(a)g(1)$.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，证明：在 $[-1,1]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $\displaystyle f''(\xi) = 3\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分（B）（上）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. B.

   因为
   $$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}=0,$$
   $$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$
   所以函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处右连续，左不连续.

2. **Solution**. A.

   因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，故 $f(x),f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

   由题可得 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+f'(x))=0$，所以 $f(0)+f'(0)=0$，即 $f'(0)=0$.

   又
   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f'(0)+f''(0)=1,$$
   所以 $f''(0)=1>0$. 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

3. **Solution**. A.

   齐次方程 $y''-2y'+2y=0$ 的特征方程为 $r^2-2r+2=0$，解得 $r=1\pm i$.

   对于 $f_1(x)=\mathrm{e}^x\sin x$，$\lambda+i\omega=1+i$ 是特征方程的单根，故可设特解为 $y_1^*=x\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)$；

   对于 $f_2(x)=\mathrm{e}^{-x}$，$\lambda=-1$ 不是特征方程的根，故可设特解为 $y_2^*=c\mathrm{e}^{-x}$.

   由解的叠加原理，原方程的特解形式应设为
   $$y^*=y_1^*+y_2^*=x\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)+c\mathrm{e}^{-x}.$$

4. **Solution**. D.

   若点 $(c,f(c))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，必须 $f''(c)=0$. D 选项给出 $f''(x)$ 在 (a,b) 内严格单调递减，则当 $a<x<c$ 时，$f''(x)>0$；$c<x<b$ 时，$f''(x)<0$，所以点 $(c,f(c))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

5. **Solution**. D.

方程 $\mathrm{d}f(x) = -\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$ 两边从 0 积分到 t，得

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{d}f(x) &= -\int_0^t \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x\\ f(t)-f(0) &= \int_0^t \mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}(\cos x)\\ f(t) &= \mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^t = \mathrm{e}^{\cos t}-\mathrm{e}.\end{aligned}$$

故 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x} - \mathrm{e}$.

6. **Solution**. C.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1$,

$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$,

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$,

由于 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|\Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} = +\infty$，所以积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\dfrac{\pi}{2}$.

因为函数 $y = x\ln\left(x^{2026}+1\right)$ 是奇函数，故 $\displaystyle\int_{-1}^1 x\ln\left(x^{2026}+1\right)\,\mathrm{d}x = 0$.

由定积分的几何意义可得 $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，所以

$$\int_{-1}^1 \left(x\ln\left(x^{2026}+1\right) + \sqrt{1-x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

8. **Solution**. $y = x$.

计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0,$$

所以斜渐近线方程为 $y = x$.

9. **Solution**. 4.

因为 $y' = \sqrt{\sin x}$，所以 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x$,

故

$$s = \int_0^\pi \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x = \int_0^\pi\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 4.$$

10. **Solution**. $\dfrac{\pi}{3}$.

因为 $f(x)=\int_0^x (t-x)\,\mathrm{d}t+\int_x^1 (x-t)\,\mathrm{d}t=x^2-x+\dfrac{1}{2}$.

故旋转体的体积

$$V=\int_0^1 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1 x\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}.$$

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 利用 Taylor 公式，

$$\begin{aligned} l&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right]}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=6. \end{aligned}$$

12. **Solution**. 当 $x=9$ 时，$1+2t^2=9$，因为 $t>1$，故 $t=2$.

因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{e}^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}}{4t}=\frac{\mathrm{e}}{2(1+2\ln t)},$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=9}=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=\dfrac{\mathrm{e}}{2(1+2\ln 2)}$，且

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{e}}{2(1+2\ln t)}\right)'\cdot\frac{1}{4t}=-\frac{\mathrm{e}}{4t^2(1+2\ln t)^2},$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{16(1+2\ln 2)^2}$.

13. **Solution**. 由题可知 $f(1)=2$，$f'(1)=0$，且 $f'(x)=3ax^2+2bx+1$，

所以 $\begin{cases}a+b+1=2,\\ 3a+2b+1=0\end{cases}$，解得 $a=-3$，$b=4$，$f(x)=-3x^3+4x^2+x$.

令 $f'(x)=-9x^2+8x+1=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{9}$ 或 $x=1$.

计算 $f(-1)=6$，$f\left(-\dfrac{1}{9}\right)=-\dfrac{14}{243}$，$f(1)=2$，$f(2)=-6$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 6，最小值为 -6.

14. **Solution**. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 可得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$.

令 $u=x^2-t^2$，则 $\mathrm{d}u=-2t\,\mathrm{d}t$，$\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u$.

所以

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xf(x^2)}{4x^3} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}\\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0} = \frac{1}{4}f'(0) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

15. **Solution**. 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \dfrac{3x}{y} = -\dfrac{y}{2}$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{3}{y}\right)\mathrm{d}y}\left(C + \int\left(-\frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{3}{y}\right)\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right)\\
&= y^3\left(C - \frac{1}{2}\int\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y\right) = y^3\left(C + \frac{1}{2y}\right) = Cy^3 + \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}
$$

其中 C 为任意常数.

16. **Solution**. 点 P_k 的坐标为 $\left(\dfrac{k}{n},0\right)$，过 $Q_k(x_k,x_k^2)$ 的切线斜率为 $2x_k$，所以有

$$
\frac{x_k^2-0}{x_k-\frac{k}{n}} = 2x_k,
$$

解得 $x_k = \dfrac{2k}{n}$，故 $S_k = \dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\cdot\dfrac{4k^2}{n^2}$.

由定积分的定义，得

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot 2\left(\frac{k}{n}\right)^2\\
&= \int_0^1 2x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1(2x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 令 $u=t-x$，则

$$
\int_0^x tf(t-x)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-x}^0 uf(u)\,\mathrm{d}u + x\int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u.
$$

原方程变形为

$$
x = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-x}^0 uf(u)\,\mathrm{d}u + x\int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u.
$$

方程两边关于 x 求导得 $1 = f(x) + xf(-x) - xf(-x) + \displaystyle\int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u$，即

$$
f(x) + \int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u = 1.
$$

令 $x=0$ 得 $f(0)=1$. 上式两边再次关于 x 求导得 $f'(x)+f(-x)=0$，即 $f'(x)=-f(-x)$.

令 $x=0$ 得 $f'(0)=-1$. 由于 $f(x)$ 可微，由上式可知 $f''(x)$ 存在，

且 $f''(x)=(f'(x))'=(-f(-x))'=f'(-x)=-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=0$.

此微分方程的特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r=\pm i$，所以可设 $f(x)=A\cos x+B\sin x$.

将 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$ 代入上式得 $A=1$，$B=-1$，所以 $f(x)=\cos x-\sin x$.

18. **Solution**. 由题可知 $f''(3)=0$，$f(3)=2$，$f(0)=0$，$l_1: y=f'(0)x$，$l_2: y-2=f'(3)(x-3)$.
将交点坐标 $(2,4)$ 分别代入 l_1 和 l_2 的方程得 $f'(0)=2$，$f'(3)=-2$. 所以

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 (x^2+x)\,\mathrm{d}f''(x)\\ &= (x^2+x)f''(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 (2x+1)f''(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^3 (2x+1)f''(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -(2x+1)f'(x)\Big|_0^3 + \int_0^3 2f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -7f'(3)+f'(0)+2(f(3)-f(0))=20.\end{aligned}$$

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 令 $F(t)=\int_0^t g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x-f(t)g(1)$，则

$$F(1)=\int_0^1 \left(g(x)f'(x)+f(x)g'(x)\right)\,\mathrm{d}x-f(1)g(1)=0,$$
$$F'(t)=g(t)f'(t)-f'(t)g(1)=f'(t)\left[g(t)-g(1)\right].$$

因为 $f'(x)\geq 0$，$g'(x)\geq 0$，所以 $g(t)\leq g(1)$，故 $F'(t)\leq 0$，$F(t)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减.

所以 $F(a)\geq F(1)=0$，即

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\geq f(a)g(1).$$

20. **Proof**. 利用 Taylor 公式，$\forall x\in[-1,1]$，存在 η 介于 0 和 x 之间，使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2.$$

所以

$$3\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3\int_{-1}^1\left(f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_{-1}^1 f''(\eta)x^2\,\mathrm{d}x.$$

由于 $f''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有最大值 M 和最小值 m，故

$$\frac{3}{2}m\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x\leq\frac{3}{2}\int_{-1}^1 f''(\eta)x^2\,\mathrm{d}x\leq\frac{3}{2}M\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x,$$
$$m\leq\frac{3}{2}\int_{-1}^1 f''(\eta)x^2\,\mathrm{d}x\leq M.$$

由介值定理，至少存在一点 $\xi\in[-1,1]$，使得 $f''(\xi)=\frac{3}{2}\int_{-1}^1 f''(\eta)x^2\,\mathrm{d}x=3\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.