CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分（B）（下）期中考试

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 设 $M_0(2,-1,1)$，$M_1(3,2,-1)$，$M_2(1,3,-2)$ 是空间三点，$\boldsymbol{l}$ 为与向量 $2\overrightarrow{M_0M_1}-2\overrightarrow{M_0M_2}$ 方向相同的单位向量，求以 $\boldsymbol{l}$，$\overrightarrow{M_0M_1}$ 为邻边的平行四边形的面积 S.

2. 已知单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴正向的夹角相等，且夹角的方向余弦为正，点 B 是点 $M(1,1,-1)$ 关于点 $N(-1,2,1)$ 的对称点，求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

3. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1+2x^2+2y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. 将曲线 $L:\begin{cases} z=x^2+1, \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周得到一个旋转曲面 S，求该旋转曲面 S 与平面 $x+y+z=1$ 的交线的参数方程.

5. 设函数 $f(x,y)=x^2(y-3)+(x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $\mathrm{d}f|_{(1,3)}$.

6. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，$y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}=xy+2$ 确定，$z=z(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x}=\displaystyle\int_0^{x-z}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7. 计算二次积分 $I=\displaystyle\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$.

8. 设函数 $z=g\left(\dfrac{y}{x}\right)+f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，$g(t)$ 二阶导数连续，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

9. 计算二重积分

$$I=\iint\limits_{D}\left(x^2y+\left(y^3+x\right)\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D: x^2+y^2\le 2x$.

10. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{V}(y+2z)\,\mathrm{d}V$，其中 V 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2,3)$, 向量 $\boldsymbol{d}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均垂直, 且与 z 轴夹锐角, 求函数 $u=xy+2y+3zx$ 在点 $M_0(1,-2,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的方向导数.

12. 设曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $Q(1,1,-2)$ 处的切线为 l，曲面 $xy+z=0$ 在点 $P_0(2,1,-2)$ 处的切平面为 π，求切线 l 在平面 π 上的投影直线的方程.

13. 记曲面 $z=x^2+y^2-xy+x+y$ 在区域 $D: x\leq 0, y\leq 0, x+y\geq -3$ 上的最低点为 Q，求过点 Q 且与直线 $\begin{cases} x+2y-z=1, \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

14. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在原点处的连续性、偏导数存在性及可微性.

15. 设函数 $f(x,y)$ 在全平面内可微，且满足 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，证明：
$\forall\, t\in \mathbf{R}$，$f(tx,ty)=f(x,y)$，即 $f(x,y)$ 恒为常数.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分（B）（下）期中考试参考答案

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 由题可知 $\overrightarrow{M_0M_1}=(1,3,-2)$，$\overrightarrow{M_0M_2}=(-1,4,-3)$，

   所以 $2\overrightarrow{M_0M_1}-2\overrightarrow{M_0M_2}=(4,-2,2)$，$\boldsymbol{l}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$.

   $S=|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}|=\dfrac{1}{\sqrt{6}}|(-1,5,7)|=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

2. **Solution**. 由题可知 $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，$B(-3,3,3)$，$\overrightarrow{OB}=3(-1,1,1)$.

   设 $\overrightarrow{OB}$ 方向上的单位向量为 $\boldsymbol{u}$，则 $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

   故 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量为 $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{u}}{|\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{u}|}=\dfrac{(0,\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

3. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\ln\left(1+2x^2+2y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\\
&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=2.
\end{aligned}
$$

4. **Solution**. 由题可得 S 的方程为 $z=x^2+y^2+1$，所以交线为 $\begin{cases}z=x^2+y^2+1,\\x+y+z=1.\end{cases}$

   消去 z 得 $x^2+y^2+x+y=0$，即 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

   令 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$，则 $z=1-x-y=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)=2-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

因此交线的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}, \\ z = 2 - \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (0 \le \theta < 2\pi).$

5. **Solution**. 方程 $f(x,y) = x^2(y-3) + (x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 两边全微分，得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= 2x\,\mathrm{d}x \cdot (y-3) + x^2\mathrm{d}y + \mathrm{d}x \cdot \arctan\sqrt{\frac{x}{y}} + (x-1)\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}\right) \\ &= 2x(y-3)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \arctan\sqrt{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x + (x-1)\cdot\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)}. \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{d}f|_{(1,3)} = \mathrm{d}y + \arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{6}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$

6. **Solution**. 令 $F(x,y) = \mathrm{e}^{xy} - xy - 2$,

注意到当 $xy = 0$ 时，方程 $\mathrm{e}^{xy} = xy + 2$ 不成立，所以 $F(x,y)$ 的定义域为 $x \neq 0, y \neq 0$. 故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y\mathrm{e}^{xy} - y}{x\mathrm{e}^{xy} - x} = -\frac{y}{x}.$$

令 $G(x,z) = \mathrm{e}^x - \displaystyle\int_0^{x-z} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$,

注意到当 $x - z = 0$ 时，方程 $\mathrm{e}^x = \displaystyle\int_0^{x-z} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 不成立，所以 $G(x,z)$ 的定义域为 $x \neq z$. 故

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{(x-z)^2}}{\mathrm{e}^{(x-z)^2}}.$$

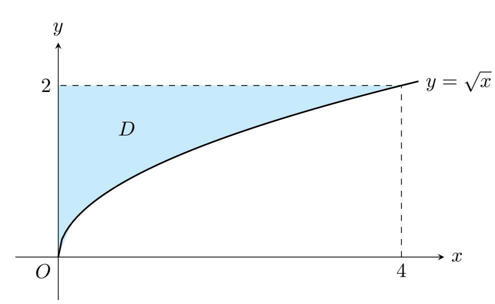
所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'_1\cdot 1 + f'_2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f'_3\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f'_1 - f'_2\cdot\frac{y}{x} + f'_3\cdot\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{(x-z)^2}}{\mathrm{e}^{(x-z)^2}}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq z.$$

7. **Solution**.

积分区域 D 如右图所示. 交换积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} \frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}\left(1+y^3\right)}{\sqrt{1+y^3}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9}-1\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



8. **Solution**.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + f'_1\cdot y + f'_2\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left[-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)\right] + \left[f'_1 + y\left(xf''_{11} - \frac{x}{y^2}f''_{12}\right)\right] + \left[-\frac{1}{y^2}f'_2 + \frac{1}{y}\left(xf''_{21} - \frac{x}{y^2}f''_{22}\right)\right].$$

由于 $f(u,v)$ 二阶偏导数连续，所以 $f''_{12} = f''_{21}$，整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right) + f'_1 - \frac{1}{y^2}f'_2 + xyf''_{11} - \frac{x}{y^3}f''_{22}.$$

9. **Solution**. 积分区域 D 是以点 $(1,0)$ 为圆心，半径 1 的圆盘.

由于 D 关于 x 轴对称，且 x^2y 与 $y^3\sqrt{x^2+y^2}$ 关于 y 均为奇函数，所以

$$\iint_D x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D y^3\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

故 $I = \iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

用极坐标代换，D 的极坐标方程为 $r = 2\cos\theta$，其中 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot r^2\,\mathrm{d}r = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

10. **Solution**. 由积分区域 V 的对称性易知 $\iiint_V y\,\mathrm{d}V = 0$，所以

$$I = 2\iiint_V z\,\mathrm{d}V = 2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z,$$

其中 D_{xy} 是锥面和半球面的交线在 xOy 平面上的投影区域，即 $x^2+y^2 \le \frac{1}{2}$.

用柱坐标代换，锥面的方程为 $z = r$，半球面的方程为 $z = \sqrt{1-r^2}$，所以

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z \\ &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r\,\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{1-r^2}} z\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r(1-r^2-r^2)\,\mathrm{d}r = \pi(r^2-r^4)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (-5,-5,5)$，取 $\boldsymbol{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$.

$\nabla u = (y+3z, x+2, 3x)$，所以 $\nabla u|_{M_0} = (1,3,3)$.

$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{d}} = \nabla u|_{M_0}\cdot\boldsymbol{d} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. **Solution**. 设 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{l}$，π 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$.

令 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z) = x+y+z$，$H(x,y,z) = xy+z$，

则 $\nabla F|_Q = (2x,2y,-4z)|_Q = (2,2,-4)$，$\nabla G|_Q = (1,1,1)$，$\nabla H|_{P_0} = (y,x,1) = (1,2,1)$.

$\nabla F|_Q \times \nabla G|_Q = (6,-6,0)$, 取 $\boldsymbol{l} = (1,-1,0)$, 所以 l 的方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{0}$, 即 $\begin{cases} x+y=2, \\ z=-2. \end{cases}$

取 $\boldsymbol{n} = \nabla H|_{P_0} = (1,2,1)$，所以 π 的方程为 $x+2y+z-2=0$.

设经过 l 的平面束的方程为 $x+y-2+\lambda(z+2)=0$，令其与 π 垂直，得 $1+2+\lambda=0$，解得 $\lambda=-3$，

所以直线方程为 $\begin{cases} x+y-3z-8=0, \\ x+2y+z-2=0. \end{cases}$

13. **Solution**. 先求曲面在区域 D 上的最低点.

考虑 D 的内部. 令 $z'_x = 2x-y+1 = z'_y = 2y-x+1 = 0$，解得唯一驻点 $(-1,-1)$，$z(-1,-1)=-1$.

考虑 D 的坐标轴边界. 由对称性不妨只考虑在 y 轴上时，此时

$$x=0\, z = y^2+y = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \in \left[-\frac{1}{4}, 6\right].$$

考虑 D 的斜边边界，即直线 $x+y=-3$，此时

$$z = x^2+(-3-x)^2 - x(-3-x) + x - 3 - x = 3x^2+9x+6 = 3\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \in \left[-\frac{3}{4}, 6\right].$$

综上所述，曲面在区域 D 上的最低点为 $Q(-1,-1)$，$z(Q)=-1$.

取平面的法向量为 $\boldsymbol{n} = (2,1,-1)\times(1,2,-1) = (1,1,3)$，

所以平面方程为 $x+1+y+1+3(z+1)=0$，即 $x+y+3z+5=0$.

14. **Solution**.

由于当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\left|\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le |x|$，且 $|x|\to 0$，

所以由夹逼定理可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$，因此函数 $f(x,y)$ 在原点处连续.

又 $f(x,0) = f(0,y) \equiv 0$，所以 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，因此函数 $f(x,y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

当 $y=x, x\to 0, y\to 0$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y^3}{2y^2\cdot\sqrt{2}|y|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{y\to 0} \frac{y}{|y|}$$

不存在，所以函数 $f(x,y)$ 在原点处不可微.

15. **Solution**. 令 $\varphi(t) = f(tx,ty) - f(x,y)$，则 $\varphi'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$，

所以 $\varphi(t) \equiv \varphi(1) = f(x,y) - f(x,y) = 0$，$f(x,y) \equiv f(tx,ty)\Big|_{t=0} = f(0,0)$，

因此 $\forall t\in\mathbf{R}$，$f(tx,ty) = f(x,y)$，即 $f(x,y)$ 恒为常数 $f(0,0)$.