
CHAPTER 1

2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ 的等值面不可能是 () .

- A. 圆锥面
B. 椭圆抛物面
C. 双叶双曲面
D. 单叶双曲面

2. 设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 1}{x^2 + y^2} = 2$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 () .

- A. 不存在偏导数
B. 存在偏导数, 但不可微
C. 可微, $f_x(0, 0) \neq 0, f_y(0, 0) \neq 0$
D. 可微, $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$

3. 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \, dv$, 其中 Ω 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围成的立体, 化为累次积分为:

$$\begin{aligned} (1) \quad I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^1 z \, dz, & (2) \quad I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{\rho}^1 z \, dz, \\ (3) \quad I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^z z \, d\rho, & (4) \quad I &= \int_0^1 z \, dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \rho \, d\rho. \end{aligned}$$

其中正确的为 () .

- A. (2) (4)
B. (1) (3)
C. (2) (3)
D. (1) (4)

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}(x+1)^n$ 在 $x=-3$ 处 () .

- A. 绝对收敛
B. 条件收敛
C. 发散
D. 敛散性不确定

$$\oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = 0,$$

A. $y - \frac{x^2}{y^3}$

B. $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$

C. $x - \frac{1}{y}$

D. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

A. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n > \frac{1}{n}$

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ($u_n > 0$) 条件收敛, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}$ 都收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

8. 设 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 点 $P_0(1, 2, -2)$ 为空间曲线 $L: x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$ 上的点, 则 u 在点 $P_0(1, 2, -2)$ 处沿曲线 L 的切线方向 \boldsymbol{l} (t 增大方向) 的方向导数为_____.

10. 设 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数为 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, -\infty < x < +\infty$, 其中 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 设 Σ 是 xOy 面上的曲线 $C: y^2 = x^2 - 1$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面, 求曲线 $L: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ 与曲面 Σ 的交点 P , 并求曲面 Σ 在 P 点处的法线方程.

12. 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\mathrm{d}f|_{(1,1)} = 3\mathrm{d}u + 4\mathrm{d}v$, $y = f(\cos x, 1 + x^2)$, 求 $\left. \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \right|_{x=0}$.

13. 设 $f(x, y)$ 连续, $D: x^2 + y^2 \leq y$, 若 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{4}{\pi} \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, 求 $f(x, y)$.

14. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = ay (a > 0)$ 介于平面 $z = 0$ 与圆锥面 $z = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ 之间的柱面面积 S .

15. 下半球面 $S: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 取上侧, 求积分 $I = \iint_S \frac{x \mathrm{d}y \mathrm{d}z + (z + 1)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

16. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知 $f(u, v) = \oint_L (ux^2 + vy^2) \, ds$, 其中曲线 $L: x^2 + y^2 = u^2$, 求 $f_{uv}(1, 1)$.

18. 试求抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 的一张切平面, 使得它与该抛物面及圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所围成的立体体积最小.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 设 $f(x)$ 为正值连续函数, 曲线 $L: (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 (a > 0)$, 方向取逆时针方向. 证明:

$$\oint_L xf(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx \geq 2\pi a^2.$$

20. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 是条件收敛的.

CHAPTER 2

2024-2025 学年微积分 (B) (下) 期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

函数的等值面为

$$x^2 + y^2 - z^2 = C.$$

当 $C = 0$ 时为圆锥面; 当 $C > 0$ 时为单叶双曲面; 当 $C < 0$ 时为双叶双曲面. 它不可能是椭圆抛物面.

2. **Solution.** D.

由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 1}{x^2 + y^2} = 2$ 可知, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时,

$$f(x, y) - 1 = 2(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2)$$

易知 $f(0, 0) = 1$, 所以

$$f(x, y) - f(0, 0) = o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

因而 f 在 $(0, 0)$ 处可微, 且线性主部为零, 所以

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

3. **Solution.** A.

该区域在柱坐标下为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \rho \leq z \leq 1,$$

也可写成

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \rho \leq z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

因此正确的是 (2) 和 (4) .

4. **Solution.** A.

原级数在 $x = 3$ 处条件收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n$ 条件收敛,

特别地 $a_n 2^n \rightarrow 0$, 故 $\{a_n 2^n\}$ 有界. 于是存在常数 M , 使得

$$|a_n| \leq \frac{M}{2^n}.$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} (x+1)^n$ 在 $x = -3$ 处为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

且

$$\sum |a_n| \leq M \sum \frac{1}{2^n} < \infty.$$

因此绝对收敛.

5. Solution. C.

在单连通区域 $y > 0$ 内, 任意闭曲线积分为零等价于

$$P_y = Q_x.$$

已知

$$Q = \frac{x}{y^2}, \quad Q_x = \frac{1}{y^2}.$$

C、D 均满足 $P_y = \frac{1}{y^2}$, 但 $P = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ 在 $x = 0$ 处无定义, 故选 C.

6. Solution. D.

对于 A 选项, 考虑 $u_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum u_n$ 发散, 但 $u_n > \frac{1}{n}$ 不成立;

对于 B 选项, 考虑 $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$, 则 $\sum u_n^2 = \sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 但 $\sum (-1)^n u_n = \sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ 发散;

对于 C 选项, 考虑 $u_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛,

但 $\sum u_{2k} = \sum \frac{1}{2k}$ 与 $\sum u_{2k-1} = \sum \frac{1}{2k-1}$ 均发散;

对于 D 选项, 若 $\sum a_n^2$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) < \infty,$$

因而 $\sum \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. Solution. $\frac{4\pi a^4}{3}$.

由对称性可知

$$\begin{aligned}\iint_S (x+z)^2 \mathrm{d}S &= \iint_S (x^2 + 2xz + z^2) \mathrm{d}S \\ &= \iint_S (x^2 + z^2) \mathrm{d}S = \frac{2}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}S \\ &= \frac{2a^2}{3} \iint_S \mathrm{d}S \\ &= \frac{4\pi a^4}{3}.\end{aligned}$$

8. **Solution.** $\frac{25}{27}$.

$$\nabla u = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

因而

$$\nabla u(P_0) = \frac{1}{3}(1, 2, -2).$$

曲线切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = (1, 4t, -8t^3)|_{t=1} = (1, 4, -8), \quad |\boldsymbol{\tau}| = 9.$$

所以方向导数为

$$\nabla u(P_0) \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{25}{27}.$$

9. **Solution.** 0.

注意到当 $|x| < 1$ 时,

$$\arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} - \arctan x.$$

$$\text{而 } \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

由 Taylor 定理对照可知

$$f^{(2024)}(0) = 0.$$

10. **Solution.** $\frac{\pi}{2} - 1$.

余弦级数对应 $[0, \pi]$ 上函数的偶延拓, 并作 2π 周期延拓. 因为

$$-\frac{5\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

所以

$$S\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 曲线 $C: y^2 = x^2 - 1$ 绕 y 轴旋转所得曲面为

$$x^2 + z^2 - y^2 = 1.$$

直线 L 可写成

$$x = 0, \quad y = 1 - t, \quad z = t.$$

代入曲面方程得

$$t^2 - (1 - t)^2 = 1,$$

解得 $t = 1$. 因此交点为

$$P = (0, 0, 1).$$

设

$$F(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^2 - 1,$$

则

$$\nabla F(P) = (0, 0, 2).$$

故法线方程为

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z - 1}{2}.$$

12. **Solution.** 由 $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$ 可知

$$f_u(1, 1) = 3, \quad f_v(1, 1) = 4.$$

计算 $\frac{dy}{dx} = f_u \cdot (-\sin x) + f_v \cdot 2x$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{df_u}{dx} \sin x - f_u \cos x + 2x \frac{df_v}{dx} + 2f_v.$$

将 $x = 0$ 代入上式得

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -f_u(1, 1) + 2f_v(1, 1) = -3 + 8 = 5.$$

13. **Solution.** 记

$$C = \frac{4}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

则

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - C.$$

两边在 D 上积分并乘以 $\frac{4}{\pi}$, 得

$$C = \frac{4}{\pi} \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - C.$$

区域 D 在极坐标下为

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq \sin \theta.$$

因而

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sin \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi (|\cos \theta|^3 - 1) \, d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

所以

$$C = \frac{2}{3} - \frac{8}{9\pi}.$$

最终

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{9\pi}.$$

14. **Solution.** 圆柱面 $x^2 + y^2 = ay$ 在极坐标下为

$$r = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

其底面圆周弧长为

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\theta = a \, d\theta.$$

圆锥面给出的高度为

$$z = \frac{r}{a} = \sin \theta.$$

因而柱面面积为

$$S = \int_0^\pi z \, ds = a \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2a.$$

15. **Solution.** 下半球面 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上满足 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$, 因此

$$I = \iint_S x \, dy \, dz + (z+1)^2 \, dx \, dy.$$

记 S' 为 $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ 取下侧, $\Sigma = S \cup S'$, 则

$$\begin{aligned}I &= \oiint_{\Sigma} x \, dy \, dz + (z+1)^2 \, dx \, dy - \iint_{S'} x \, dy \, dz + (z+1)^2 \, dx \, dy \\ &= - \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} (1+2z+2) \, dx \, dy \, dz - \iint_{S'} dx \, dy \\ &= -3 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} dx \, dy \, dz - 2 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} z \, dx \, dy \, dz + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \\ &= -2\pi - 2 \int_{-1}^0 z \cdot \pi(1-z^2) \, dz + \pi \\ &= -2\pi + \frac{\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

16. **Solution.** 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} nx^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right)' = x \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = x \cdot \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{x(1-x^2)}{(1-x)^4}.\end{aligned}$$

得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1) x^n \Big|_{x=-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{27} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}.$$

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 将圆 $L: x^2 + y^2 = u^2$ 参数化为

$$x = u \cos \theta, \quad y = u \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

则 $ds = u d\theta$. 因而

$$f(u, v) = \int_0^{2\pi} (u \cdot u^2 \cos^2 \theta + v \cdot u^2 \sin^2 \theta) u d\theta = \pi u^4 + \pi v u^3.$$

所以

$$f_{uv}(u, v) = 3\pi u^2,$$

从而

$$f_{uv}(1, 1) = 3\pi.$$

18. **Solution.** 抛物面在点 $(a, b, 1 + a^2 + b^2)$ 处的切平面为 $2a(x - a) + 2b(y - b) - (z - 1 - a^2 - b^2) = 0$, 即

$$z = 1 - a^2 - b^2 + 2ax + 2by.$$

圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 在 xOy 平面上的投影区域为圆域

$$D: x^2 + y^2 \leq 2x, z = 0.$$

因抛物面是凸曲面, 故所围立体的体积为切平面上方、抛物面下方、圆柱面内侧部分的体积

$$V(a, b) = \iint_D dx dy \int_{1-a^2-b^2+2ax+2by}^{1+x^2+y^2} dz,$$

即

$$V(a, b) = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy - 2a \iint_D x dx dy - 2b \iint_D y dx dy + \pi(a^2 + b^2).$$

因为 D 的形心为 $(1, 0)$, 所以 $\iint_D x dx dy = \pi$, $\iint_D y dx dy = 0$,

故

$$\begin{aligned}
 V(a, b) &= \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3 \, dr - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) \\
 &= \frac{3\pi}{2} - 2a\pi + \pi(a^2 + b^2) = \pi \left[(a-1)^2 + b^2 + \frac{1}{2} \right].
 \end{aligned}$$

显然当 $a = 1$ 且 $b = 0$ 时, $V(a, b)$ 取得最小值 $V_{\min} = \frac{\pi}{2}$.

此时切点为 $(1, 0, 2)$, 切平面方程为 $z = 2x + 0 \cdot y + 1 - 1 - 0$, 即

$$z = 2x.$$

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 记

$$P(x, y) = -\frac{y}{f(x)}, \quad Q(x, y) = xf(y).$$

由 Green 公式,

$$\oint_L xf(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy = \iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy,$$

其中 D 是圆盘 $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2$.

由圆盘关于直线 $y = x$ 对称,

$$\iint_D f(y) \, dx \, dy = \iint_D f(x) \, dx \, dy.$$

所以

$$\begin{aligned}
 \oint_L xf(y) \, dy - \frac{y}{f(x)} \, dx &= \iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy \\
 &= \iint_D \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) \, dx \, dy \\
 &\geq 2 \iint_D dx \, dy = 2\pi a^2.
 \end{aligned}$$

20. **Proof.** 设

$$\alpha_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

则

$$\sin(\pi\sqrt{n^2 + 1}) = \sin(n\pi + \pi\alpha_n) = (-1)^n \sin(\pi\alpha_n).$$

因为

$$\alpha_n \sim \frac{1}{2n},$$

所以

$$\sin(\pi\alpha_n) \sim \frac{\pi}{2n}.$$

于是绝对值级数与调和级数同阶, 故发散.

另一方面, α_n 严格单调递减, 且趋于零,

而 $\pi\alpha_n = \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{\pi}{2}$, 因此 $\sin(\pi\alpha_n)$ 也严格单调递减, 且趋于零.

由 Leibniz 判别法, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\pi\alpha_n)$$

收敛. 故原级数条件收敛.