CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分（B）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (2, -1, 2)$，$\boldsymbol{b} = (-1, 2, -2)$，又向量 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角（在 0 与 π 之间）的平分线上，且 $|\boldsymbol{c}| = 6\sqrt{2}$，求向量 $\boldsymbol{c}$.

2. 求过直线 $L: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi: x + y + 2z - 4 = 0$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的平面方程.

3. 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 45, \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ 在点 $M(-2, 1, 6)$ 的切线和法平面方程.

4. 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $\mathrm{d}f|_{(1,2)}$.

5. 设函数 $z=f\left(x^2+y,\frac{x}{y}\right)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 设函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在 $(1,-1)$ 处取得极值，求常数 a，并确定极值类型.

7. 计算二次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}\sin\frac{\pi y}{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{1}\sin\frac{\pi y}{x}\,\mathrm{d}x$.

8. 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

9. 计算积分 $I=\iint\limits_D |x^2+y^2-2x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$.

10. 计算积分 $I=\iiint\limits_V (y\cos x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 V 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 求直线 $L:\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y-\beta}{0}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面方程，并就 α,β（α,β 不同时为零）的值讨论方程表示什么曲面?

12. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$ 的方向导数最大，并求出该方向导数.

13. 曲面 Σ 的方程为 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$，平面 π 为曲面 Σ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面，直线 L_1 为直线

$$L: \begin{cases} 2x + 2z + 1 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

在平面 π 上的投影直线，求点 $P(1,1,1)$ 到直线 L_1 的距离 d.

14. 设函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

(1) 求 $f_x(x,y), f_y(x,y)$；

(2) 讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

15. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调减少的连续函数，试证明：对任意 $t \geq 0$ 都成立不等式

$$\iint\limits_D \left(\frac{t^2}{x} - 6y\right) f(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \geq 0,$$

其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq t,\ y \leq x \leq t\}$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分（B）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 由

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 3$$

可知

$$\boldsymbol{a}^0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad \boldsymbol{b}^0 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

因而夹角内角平分线方向可取

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0 = \frac{1}{3}(1, 1, 0).$$

单位方向为

$$\boldsymbol{d}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

又 $|\boldsymbol{c}| = 6\sqrt{2}$，故

$$\boldsymbol{c} = 6\sqrt{2}\,\boldsymbol{d}^0 = (6, 6, 0).$$

2. **Solution**. 显然 $x + 2z + 1 = 0$ 与平面 π 的夹角不为 $\frac{\pi}{3}$，因此可设过 L 的平面束方程为

$$x + 2z + 1 + \lambda(x - y - z + 1) = 0,$$

其法向量为

$$\boldsymbol{n}_1 = (\lambda + 1, -\lambda, 2 - \lambda).$$

平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2 = (1, 1, 2)$. 由两平面夹角为 $\frac{\pi}{3}$，得

$$\frac{|5 - 2\lambda|}{\sqrt{6}\sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 5}} = \frac{1}{2}.$$

化简得

$$\lambda^2 + 34\lambda - 35 = 0.$$

所以 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -35$，代入平面束，得所求平面为

$$2x - y + z + 2 = 0 \quad 或 \quad 34x - 35y - 37z + 34 = 0.$$

3. **Solution**. 令 $F=2x^2+y^2+z^2-45$，$G=x^2+2y^2-z$，则

$$\nabla F|_{(-2,1,6)}=(-8,2,12),\qquad \nabla G|_{(-2,1,6)}=(-4,4,-1).$$

因而切线方向为

$$\nabla F\times\nabla G=(-50,-56,-24),$$

取切向量 $\boldsymbol{\tau}=(25,28,12)$，故切线方程为

$$\frac{x+2}{25}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{12}.$$

法平面方程为 $25(x+2)+28(y-1)+12(z-6)=0$，即

$$25x+28y+12z-50=0.$$

4. **Solution**. 由

$$f_x=y\mathrm{e}^{-x^2y^2}+\frac{x}{x^2+y^2},\qquad f_y=x\mathrm{e}^{-x^2y^2}+\frac{y}{x^2+y^2},$$

且 f_x,f_y 在 $(1,2)$ 处连续，故 f 在 $(1,2)$ 处可微. 又

$$f_x(1,2)=2\mathrm{e}^{-4}+\frac{1}{5},\qquad f_y(1,2)=\mathrm{e}^{-4}+\frac{2}{5}.$$

因此

$$\mathrm{d}f|_{(1,2)}=\left(2\mathrm{e}^{-4}+\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^{-4}+\frac{2}{5}\right)\mathrm{d}y.$$

5. **Solution**. 记

$$u=x^2+y,\qquad v=\frac{x}{y}.$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'u_x'+f_2'v_x'=2xf_1'+\frac{1}{y}f_2'.$$

再对 y 求偏导，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2x\left(f_{11}''+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(f_{21}''+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)\\&=2xf_{11}''+\frac{y-2x^2}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}'',\end{aligned}$$

6. **Solution**. 因

$$f_x=4x+a+y^2,\qquad f_y=2xy+2,$$

而 f 在 $(1,-1)$ 处取得极值，所以

$$f_x(1,-1)=0,\qquad f_y(1,-1)=0.$$

解得

$$a=-5.$$

此时

$$A=f_{xx}=4,\qquad B=f_{xy}=2y,\qquad C=f_{yy}=2x,$$

在 $(1,-1)$ 处

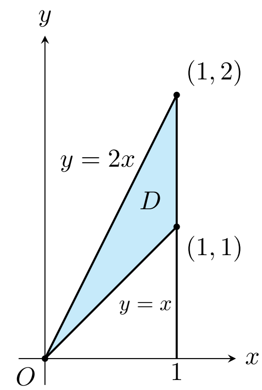
$$AC-B^2=4\cdot 2-(-2)^2=4>0,\qquad A>0.$$

故 $f(x,y)$ 在 $(1,-1)$ 处取得极小值.

7. **Solution**.

由题意绘制积分区域 D 如图所示，可以改写为

$$D: 0 \le x \le 1, \qquad x \le y \le 2x.$$



因而

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2x} \sin\frac{\pi y}{x}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{x}{\pi}\cos\frac{\pi y}{x}\right]_{y=x}^{2x} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

8. **Solution**. 对方程组 $\begin{cases} \varphi(x^2, \mathrm{e}^y, z) = 0, \\ y = \sin x \end{cases}$ 两边关于 x 求导，得 $\begin{cases} 2x\varphi_1 + \mathrm{e}^y\varphi_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varphi_3\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x. \end{cases}$

解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x\varphi_1 + \mathrm{e}^y\cos x\,\varphi_2}{\varphi_3}.$$

再对 $u = f(x,y,z)$ 两边关于 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f_1' + \cos x\, f_2' - \frac{2x\varphi_1 + \mathrm{e}^y\cos x\,\varphi_2}{\varphi_3} f_3'.$$

9. **Solution**.

记

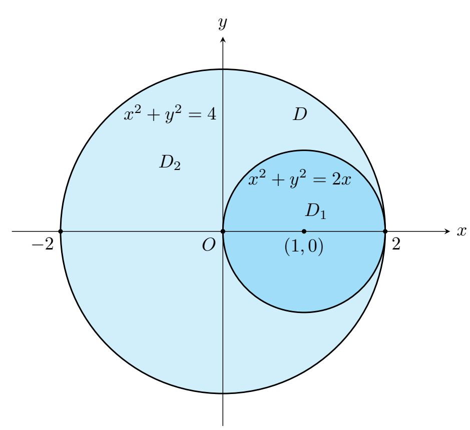
$$f = x^2 + y^2 - 2x.$$

令

$$D_1: x^2+y^2 \le 2x, \qquad D_2 = D \setminus D_1.$$

则 $f \le 0$ 于 D_1，$f > 0$ 于 D_2，故

$$I = -2\iint_{D_1} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



用极坐标代换，

$$\begin{aligned} I &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} (2r\cos\theta - r^2) r\,\mathrm{d}r \\ &\quad + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^2 (r^2 - 2r\cos\theta) r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\left(4 - \frac{16}{3}\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 8\pi = 9\pi. \end{aligned}$$

10. **Solution**. 由对称性可知

$$\iiint_V y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

联立两曲面方程可得交线在 xOy 平面上的投影为

$$x^2+y^2=1.$$

因而

$$I=\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z.$$

用极坐标代换，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\,\mathrm{d}z\\&=\pi\int_0^1(2-r^2-r^4)r\,\mathrm{d}r\\&=\pi\left(r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^1=\frac{7\pi}{12}.\end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. 将直线写成参数方程 $\begin{cases}x=\alpha t,\\ y=\beta,\\ z=t\end{cases}$，直线在绕 z 轴旋转的过程中，对应点到 z 轴的距离不变.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 L 上的点，绕 z 轴旋转到点 $M(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases}x^2+y^2=x_0^2+y_0^2=\alpha^2t^2+\beta^2,\\ z=z_0=t.\end{cases}$$

消去 t 得旋转曲面方程

$$x^2+y^2-\alpha^2z^2=\beta^2.$$

当 $\alpha=0$，$\beta\neq 0$ 时，方程为 $x^2+y^2=\beta^2$，表示圆柱面；

当 $\alpha\neq 0$，$\beta=0$ 时，方程为 $x^2+y^2=\alpha^2z^2$，表示圆锥面；

当 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$ 时，方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{\beta^2}-\dfrac{\alpha^2z^2}{\beta^2}=1$，表示单叶双曲面.

12. **Solution**. 方向 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0).$$

设椭球面上一点为 (a,b,c)，则

$$2a^2+2b^2+c^2=1.$$

因

$$\nabla f(a,b,c)=(2a,2b,2c),$$

所以方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\Big|_{(a,b,c)}=\nabla f(a,b,c)\cdot\boldsymbol{l}^0=\sqrt{2}(a-b).$$

问题转化为在约束 $2a^2+2b^2+c^2=1$ 下求 $\sqrt{2}(a-b)$ 的最大值.

用 Lagrange 乘数法，设 $L(a,b,c,\lambda)=\sqrt{2}(a-b)+\lambda(2a^2+2b^2+c^2-1)$，令 $\nabla L=\mathbf{0}$，得

$$\begin{cases}\sqrt{2}+4\lambda a=0,\\ -\sqrt{2}+4\lambda b=0,\\ 2\lambda c=0,\\ 2a^2+2b^2+c^2=1.\end{cases}$$

解得驻点为 $M_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 或 $M_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

计算 $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_1}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_2}=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{2}$，

所以在椭球面上的点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 处函数 f 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数最大，最大值为 $\sqrt{2}$.

13. **Solution**. 令

$$F(x,y,z)=z^5-xz^4+yz^3-1.$$

则

$$\nabla F(1,1,1)=(-1,1,4).$$

故切平面 π 为 $-(x-1)+(y-1)+4(z-1)=0$，即

$$x-y-4z+4=0.$$

设过直线 L 的平面束方程为

$$2x+2z+1+\lambda(x-y-z+1)=0.$$

令该平面垂直于 π，可得 $(\lambda+2,-\lambda,-\lambda+2)\cdot(-1,1,4)=0$，解得 $\lambda=1$，从而平面为

$$3x-y+z+2=0.$$

所以投影直线 L_1 为

$$\begin{cases}x-y-4z+4=0,\\ 3x-y+z+2=0.\end{cases}$$

取 L_1 上一点 $P_1(1,5,0)$，则 $\overrightarrow{P_1P}=(0,-4,1)$，又直线的方向向量可取为

$$\boldsymbol{s}_1=(1,-1,4)\times(3,-1,1)=(-5,-13,2).$$

故

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P}\times\boldsymbol{s}_1|}{|\boldsymbol{s}_1|}=\frac{5\sqrt{1+1+16}}{\sqrt{25+169+4}}=\frac{5\sqrt{11}}{11}.$$

14. **Solution**. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y(x,y)=-\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

又

$$f(x,0)=x,\qquad f(0,y)=0,$$

所以

$$f_x(0,0)=1,\qquad f_y(0,0)=0.$$

因而

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

下面讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性. 因为

$$f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y=\frac{x^3}{x^2+y^2}-x=-\frac{xy^2}{x^2+y^2},$$

所以

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

问题转化为判断 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 是否为 0.

考虑路径 $y=x$，由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{|x^3|}$ 不存在，

这意味着 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在，因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

15. **Proof**. 交换积分次序可得

$$\iint\limits_D\left(\frac{t^2}{x}-6y\right)f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^x\left(\frac{t^2}{x}-6y\right)\,\mathrm{d}y.$$

即

$$\iint\limits_D\left(\frac{t^2}{x}-6y\right)f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t(t^2-3x^2)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

记

$$F(t)=\int_0^t(t^2-3x^2)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则

$$F'(t)=2t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+t^2f(t)-3t^2f(t)=2t\int_0^t(f(x)-f(t))\,\mathrm{d}x.$$

由于 f 单调减少，当 $0\le x\le t$ 时，$f(x)\ge f(t)$，故 $t\ge 0$ 时 $F'(t)\ge 0$. 又 $F(0)=0$，所以 $F(t)\ge 0$，即

$$\iint\limits_D\left(\frac{t^2}{x}-6y\right)f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ge 0.$$