CHAPTER 1

2011-2012 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 5 分，共 60 分)

1. 计算极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2011^n}{n!}$.

2. 设 $x\to 0$ 时，无穷小量 $u=\sqrt[4]{1-a\arctan x^2}-1$ 与 $v=\ln\cos x$ 等价，求常数 a 的值.

3. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x^3}$.

4. 计算极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\arctan 2x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

6. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且任给自然数 n，有 $\varphi\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\sqrt[n]{n}$.

（1）求 $\varphi(1)$；

（2）设 $f(x)=(x-1)\varphi(x)$，求 $f'(1)$.

7. 设 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$，求 $\mathrm{d}y(1)$.

8. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 确定，求 y'，y''.

9. 设 $\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+5x+2}$，求 $f^{(n)}(x)(n>1)$.

11. 确定自然数 n 的范围，使 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

12. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$，指出其间断点，并说明间断点的类型.

2 综合题 (每小题 6 分，共 24 分)

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可微，且 $f(0)\cdot f(2)>0$，$f(0)\cdot f(1)<0$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

14. 设函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $x=\varphi(y)$ 均存在三阶导数，且 $y'\neq 0$，请推导出反函数的求导公式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}$【用 y'，y''，y''' 表示】.

15. 证明：当 $x \geq 1$ 时，有 $\arctan x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，在 $(a, +\infty)$ 内可导，且 $f'(x) > 1$. 若 $f(a) < 0$，证明：方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(a, a - f(a))$ 内有唯一根.

3 证明题 (每小题 8 分，共 16 分)

17. 分别叙述数列 x_n 有界和收敛（以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 为例）的定义，并证明：收敛数列是有界数列.

18. 如果记 $\xi = \theta \cdot x$，$0 < \theta < 1$，则 Lagrange 中值公式 $f(x) - f(0) = xf'(\xi)$ 可以写作：$f(x) - f(0) = xf'(\theta x)$，$0 < \theta < 1$，$\theta$ 的大小通常与 x 相关.

（1）若 $f''(0) \neq 0$，试证：$\lim\limits_{x\to 0} \theta = \dfrac{1}{2}$；

（2）设 $f(x) = \arctan x$，求 $\lim\limits_{x\to 0} \theta$.

CHAPTER 2

2011-2012 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 5 分，共 60 分)

1. **Solution**. 当 $n > 2011$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2011^n}{n!} \cdot \dfrac{(n-1)!}{2011^{n-1}} = \dfrac{2011}{n} < 1$，

   数列 $\{a_n\}$ 从第 2012 项开始单调递减，且 $a_n > 0$，所以数列 $\{a_n\}$ 收敛.

   对 $a_n = \dfrac{2011}{n} a_{n-1}$ 两边取极限，得 $l = 0$.

2. **Solution**. 由题意可知

$$
\begin{aligned}
1 &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{1 - a \arctan x^2} - 1}{\ln \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{4} a \arctan x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{a}{4} x^2}{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

   故 $a = 2$.

3. **Solution**. 由 Lagrange 中值定理，存在 ξ 介于 x 和 $\sin x$ 之间，使得 $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin x} = \mathrm{e}^{\xi}(x - \sin x)$.

   易知当 $x \to 0$ 时，$\xi \to 0$，所以

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{\xi} \frac{x - \sin x}{x^3} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

4. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l &= \exp\left[\lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}}{x}\right] = \exp\left[\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x}\right] \\
&= \exp\left[\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}\right] = \exp\left[\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}
$$

5. **Solution**. 由题意可知 $f(0)=y(0)=0$，$f'(0)=y'(0)=\left.\dfrac{2}{1+4x^2}\right|_{x=0}=2$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=f'(0)=2.$

6. **Solution**. （1）因 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $\varphi(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

（2）由导数定义，$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\varphi(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\varphi(1)=1.$

7. **Solution**. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$，所以 $\mathrm{d}y(1)=y'(1)\mathrm{d}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\mathrm{d}x.$

8. **Solution**. 方程两边对 x 求导，得 $2x-y-x\cdot y'+2y\cdot y'=0$，所以 $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}.$

$y''=\dfrac{(2-y')(x-2y)-(2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}=\dfrac{6}{(x-2y)^3}.$

9. **Solution**. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\cos t+t\sin t-\cos t}{\frac{-\sin t}{\cos t}}=-t\cos t$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(-t\cos t)'\cdot\dfrac{1}{\frac{-\sin t}{\cos t}}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{\tan t}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right).$

10. **Solution**. $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$，所以

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n\,n!\,2^n}{(2x+1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n\,n!}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

11. **Solution**. 欲使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在，必须 $n-1>0$，此时 $f'(0)=0$.

欲使导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应有 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0.$

当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}$，所以必须 $n-2>0.$

综上所述，自然数 n 的范围是 $n>2.$

12. **Solution**. $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=1.$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan\frac{x+1}{x-1}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}=0$，且 $f(0)$ 无定义，

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点；

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x+1}{x-1}=-\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}}$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}}$，

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

2 综合题 (每小题 6 分，共 24 分)

13. **Solution**. 由连续函数的介值定理，存在 $\eta_1\in(0,1),\eta_2\in(1,2)$ 使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0.$

设 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 内可导，且 $g(\eta_1)=g(\eta_2)=0.$

由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,2)$ 使得 $g'(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}(f'(\xi)-f(\xi))=0$，所以 $f'(\xi)=f(\xi).$

14. **Solution**. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \dfrac{1}{y'}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{y'''(y')^3-3(y')^2(y'')^2}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'} = -\frac{y'y'''-3(y'')^2}{(y')^5}.$$

15. **Solution**. 令 $f(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}(x\geq 1)$，

则 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \equiv 0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒为常数.

又 $f(1) = \arctan 1 - \dfrac{1}{2}\arccos 1 = \dfrac{\pi}{4}$，所以当 $x\geq 1$ 时，$\arctan x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

16. **Solution**. 记 $b = a - f(a) > a$，则由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) > f(a) + (b-a) = 0.$$

又由连续函数的介值定理，存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $f(\eta)=0$.

因为 $f(x)$ 是严格单调递增的，所以 η 是方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a, a-f(a))$ 内的唯一根.

3 证明题 (每小题 8 分，共 16 分)

17. 数列 x_n 有界的定义：$\exists M>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$，恒有 $|x_n|\leq M$.

数列 x_n 收敛于 a 的定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

Proof. 取 $\varepsilon=1$，则存在自然数 N 使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<1$，从而

$$|x_n| = |x_n-a+a| < 1+|a|.$$

设 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则 $\forall n\in\mathbf{N}$，恒有 $|x_n|\leq M$. 所以数列 x_n 有界.

18. **Proof**. （1）计算

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{\theta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{\theta x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2\theta x} = \frac{1}{2}f''(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

由 $f''(0)\neq 0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$.

（2）由题设可以写出 $\arctan x - 0 = \dfrac{x}{1+\xi^2} = \dfrac{x}{1+(\theta x)^2}$，所以

$$\theta^2 = \frac{\frac{x}{\arctan x}-1}{x^2} = \frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\theta^2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2\arctan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.