CHAPTER 1

2012-2013 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 5 分，共 60 分)

1. 计算极限 $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

2. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

3. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

4. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{\sin x^2}$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}$，求 $f'(1)$.

6. 设 $f(x)=\ln\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$，求 $f'(0)$.

7. 设 $y=y(x)$ 由 $x\mathrm{e}^{f(y)}=x^y\ln 3$ 确定，$f(y)$ 可导，且 $f'(y)\neq\ln x$，求 $\mathrm{d}y$.

8. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} y=t^m \\ x=\ln 2t, \end{cases}$ 给出，计算 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{t=1}$.

9. 设当 $x\to 0$ 时，$u=\sqrt[3]{1+x^2}\sqrt[3]{1-x}-1\sim cx^k$，求 c,k 的值.

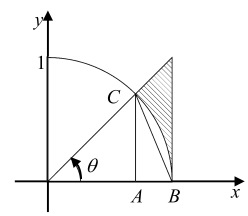
10. 设 $g(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ bx, & x\geq 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，$f(x)=\sin x$. 求 b 以及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(g(x)\right)\right|_{x=0}$.

11. 设 $f(x)=\dfrac{3x}{2x^2+x-1}$，计算 $f^{(n)}(0)$.

12. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$，求出其所有间断点，并说明间断点的类型.

2 综合题 (每小题 7 分，共 28 分)

13. 如图所示，在单位圆内，当 $\theta\to 0$ 时，证明三角形 ABC 的面积 $a(\theta)$ 与阴影部分的面积 $b(\theta)$ 是同阶无穷小.



14. 证明当 n 充分大时，$\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)<\dfrac{1}{n^2}$.

15. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a<b$，依据极限定义证明当 n 充分大时，$x_n<y_n$.

16. 设物体 P 沿抛物线 $x=y^2(y>0)$ 自原点向右移动，与原点的距离为 r. 设其水平速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 保持为常量 A.

（1）计算 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

（2）随着物体的移动，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 是逐渐变大还是逐渐变小或者忽大忽小？

（3）计算 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 的最终极限.

3 证明题 (每小题 6 分，共 12 分)

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}.$$

18. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，证明存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{4}\right)$.

CHAPTER 2

2012-2013 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 5 分，共 60 分)

1. **Solution**. $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} < \dfrac{n}{n+1}$.

   因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$，由夹逼定理得 $l = 1$.

2. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin x} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to\pi^+} \frac{-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

3. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l &= \exp\left\{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right]\right\} \\
&= \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}
$$

4. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+2x} - 1 - x\right)\left(\sqrt{1+2x} + 1 + x\right)}{x^2\left(\sqrt{1+2x} + 1 + x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x - (1+x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+2x} + 1 + x\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x - 1 - 2x - x^2}{x^2\left(\sqrt{1+2x} + 1 + x\right)} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

5. **Solution**.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)} \\ &= \frac{(-1)^{99}\cdot 99!}{101!} = -\frac{1}{10100}. \end{aligned}$$

6. **Solution**.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)\right]' \\ &= \frac{1}{2\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)' \\ &= \frac{1}{2\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

将 $x=0$ 代入上式得 $f'(0)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{7}{8}$.

7. **Solution**. 取对数，得 $\ln x+f(y)=y\ln x+\ln\ln 3$. 方程两边微分得

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x+f'(y)\mathrm{d}y=\ln x\mathrm{d}y+y\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

整理得 $\mathrm{d}y=\dfrac{y-1}{x\left[f'(y)-\ln x\right]}\mathrm{d}x$.

8. **Solution**. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{mt^{m-1}}{\frac{2}{2t}}=mt^m$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(mt^m)'_t\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{t}}=m^2t^m$.

设 $\dfrac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}=m^kt^m$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(m^kt^m\right)'\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{t}}=m^{k+1}t^m$.

由数学归纳法得 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=m^nt^m$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right|_{t=1}=m^n$.

9. **Solution**.

$$u=\sqrt[3]{1-x+x^2-x^3}-1=1+\frac{1}{3}(-x+x^2-x^3)+o(-x+x^2-x^3)-1=-\frac{1}{3}x+o(x).$$

所以 $u\sim-\dfrac{1}{3}x$，即 $c=-\dfrac{1}{3}$，$k=1$.

10. **Solution**. $g(0)=0$，因 $g'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}=g'_+(0)=b$，所以 $b=-\dfrac{\pi}{2}$.

$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(g(x)\right)\right|_{x=0}=f'(g(0))\cdot g'(0)=\cos 0\cdot b=-\dfrac{\pi}{2}$.

11. **Solution**. $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{x+1}$，所以

$$f^{(n)}(0)=\left.\frac{(-1)^n\cdot n!\,2^n}{(2x-1)^{n+1}}\right|_{x=0}+\left.\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}\right|_{x=0}=n!\left[(-1)^n-2^n\right].$$

12. **Solution**. 当 $|x|>1$ 时，$x^n\to\infty$，所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=1$；

当 $x=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}$；当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 不存在；

当 $|x|<1$ 时，$x^n\to 0$，所以 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=0.$

综上所述，$f(x)=\begin{cases}1, & |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ \text{不存在}, & x=-1,\\ 0, & |x|<1.\end{cases}$

$f(x)$ 的间断点为 $x=-1$ 和 $x=1$.

因为 $f(1^-)=0$，$f(1^+)=1$，$f(-1^-)=1$，$f(-1^+)=0$，所以 $x=1$ 和 $x=-1$ 都是跳跃间断点.

2 综合题 (每小题 7 分，共 28 分)

13. **Solution**. 由几何关系，$a(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$，$b(\theta)=\dfrac{1}{2}\tan\theta-\dfrac{1}{2}\theta.$

当 $\theta\to0$ 时，$a(\theta)\to0$，$b(\theta)\to0$，所以 $a(\theta)$ 和 $b(\theta)$ 都是无穷小. 计算

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0}\frac{a(\theta)}{b(\theta)}&=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\tan\theta-\theta}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\theta}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0}\frac{3\theta^2}{\sec^2\theta-1}\\&=\frac{3}{2}\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^2}{\tan^2\theta}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

所以当 $\theta\to0$ 时，$a(\theta)$ 与 $b(\theta)$ 是同阶无穷小.

14. **Solution**. 计算

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{\frac{1}{x^2}}&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)^{\frac{1}{x}}\\&=\frac{1}{2}\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{x}\right]\\&=\frac{1}{2}\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1}\right]=\frac{1}{2}\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}(1-\ln x)}{x\ln x}\right]\\&=\frac{1}{2}\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\ln x}\right]=\frac{1}{2}\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}-1}{x}\right]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}<1$，

由极限的保号性，当 n 充分大时，有 $(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)<\dfrac{1}{n^2}$.

15. **Solution**. 对于 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，

由极限的定义，存在 N_1 使得当 $n>N_1$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$；存在 N_2 使得当 $n>N_2$ 时，$|y_n-b|<\varepsilon$.

设 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，$x_n<a+\varepsilon=\dfrac{a+b}{2}<b-\varepsilon<y_n$.

16. **Solution**. （1）由题设 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{(2x+1)A}{2\sqrt{x^2+x}}$.

（2）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(2x+1)A}{2\sqrt{x^2+x}}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\=&\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{x^2+x}-\frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x}}}{x^2+x}\cdot A^2\\=&\frac{1}{2}\cdot\frac{4(x^2+x)-(2x+1)^2}{2(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}\cdot A^2=-\frac{A^2}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}<0.\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 逐渐变小.

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)A}{2\sqrt{x^2+x}}=A$.

3 证明题 (每小题 6 分，共 12 分)

17. **Proof**. 函数 $f(x)$ 和函数 $y=\mathrm{e}^x$ 均在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\mathrm{e}^x\neq 0$.

由 Cauchy 中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=\frac{f'(\eta)}{\mathrm{e}^\eta}.$$

对函数 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，

代入上式即得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}$.

18. **Proof**. 令 $F(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$，显然 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$ 上连续.

注意到

$$\begin{aligned}\frac{F(0)+F\left(\frac{1}{4}\right)+F\left(\frac{2}{4}\right)+F\left(\frac{3}{4}\right)}{4}=&\frac{1}{4}\left[f(0)-f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)-f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)-f(1)\right]\\=&\frac{1}{4}\left[f(0)-f(1)\right]=0.\end{aligned}$$

由介值定理，存在 $x_0\in\left[0,\dfrac{3}{4}\right]\subset[0,1]$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{4}\right)$.