CHAPTER 1

2013-2014 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 计算数列极限 $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} \cdots \frac{2n-1}{4n}$.

2. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - 3^{x^2}}{(2^x - 3^x)^2}$.

3. 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\tan x} - \mathrm{e}^{\sin x}}{x^3}$.

4. 设 $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$，求 $f'(x)$.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x=t+t^2, \\ y=t\mathrm{e}^t \end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=h(x^2+y^2)$ 所确定，h 处处可导，且 $h'\neq\dfrac{1}{2y}$，求 y'.

7. 求函数 $f(x)=\sin\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

9. 求曲线 $y = x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线方程.

10. 指出函数 $f(x) = \left(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}$ 的间断点与类型.

2 综合题 (每小题 7 分，共 28 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)\neq 0$，且对一切 x,y 有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，证明 $f(x)$ 处处连续.

12. 讨论方程 $\ln x - \dfrac{x}{\mathrm{e}} + 1 = 0$ 有几个实根？并给出证明.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，且 $f(2)\neq 0$. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)}{f(2)}\right]^x$.

14. 有一个顶点朝上的圆锥形容器，高为 8m，底半径为 $R=2\sqrt{2}$m，向其中注水. 设当水深 $h=6$m 时，水面上升的速度为 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4}{\pi}$m/min，求此时水的体积的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

3 证明题 (每小题 6 分，共 12 分)

15. 证明不等式：当 $0<x<1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}<\mathrm{e}^{-2x}$.

16. 设 $0<x_1<x_2$，证明 $x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=(\ln\xi-1)(x_1-x_2)$，其中 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间.

CHAPTER 2

2013-2014 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 设 $x_n = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}\cdots\frac{2n-1}{4n}$，则

$$0 < x_n = \frac{2n-1}{4n}x_{n-1} < \frac{1}{2}x_{n-1} < \frac{1}{2^2}x_{n-2} < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}x_1,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}x_1 = 0$，由夹逼定理得 $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. **Solution**.

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2\ln2}-\mathrm{e}^{x^2\ln3}}{(\mathrm{e}^{x\ln2}-\mathrm{e}^{x\ln3})^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1+x^2\ln2-1-x^2\ln3+o(x^2)}{(1+x\ln2-1-x\ln3+o(x))^2} = \lim_{x\to0}\frac{(\ln2-\ln3)x^2+o(x^2)}{[(\ln2-\ln3)x+o(x)]^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(\ln2-\ln3)x^2+o(x^2)}{(\ln2-\ln3)^2x^2+o(x^2)}\\
&= \frac{1}{\ln2-\ln3}.
\end{aligned}$$

3. **Solution**. 由 Lagrange 中值定理，存在 ξ 介于 $\tan x$ 与 $\sin x$ 之间，使得 $\mathrm{e}^{\xi}(\tan x-\sin x) = \mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}$. 当 $x\to0$ 时，$\tan x\to0$，$\sin x\to0$，故 $\xi\to0$. 所以

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\xi}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2} + \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4. **Solution**. $\ln f(x) = \cos x\ln\sin x$，所以 $f'(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x + \cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)$.

5. **Solution**. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{(t+1)\mathrm{e}^t}{2t+1}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{(t+1)\mathrm{e}^t}{2t+1}\right)'\cdot\frac{1}{2t+1} = \frac{(t+2)\mathrm{e}^t\cdot(2t+1)-2(t+1)\mathrm{e}^t}{(2t+1)^3} = \frac{(2t+3)t\mathrm{e}^t}{(2t+1)^3}.$$

6. **Solution**. 方程 $y=h(x^2+y^2)$ 两边对 x 求导得

$$y'=h'(x^2+y^2)(2x+2yy'),$$

整理得 $y'=\dfrac{2xh'(x^2+y^2)}{1-2yh'(x^2+y^2)}$.

7. **Solution**. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，所以

$$\begin{aligned}
f(x)=\sin\ln(1+x)&=\sin\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\
&=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3+o\left(\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3\right)\\
&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).
\end{aligned}$$

8. **Solution**. $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2x+1}$，所以 $f^{(n)}(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-1)^n\cdot n!\,2^n}{(2x+1)^{n+1}}$，

因此 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot n!\cdot 2^{n-1}$.

9. **Solution**. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)-x=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}+t)-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\mathrm{e}+t}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,

所以曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

10. **Solution**. 函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=1$.

当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}=\infty$，故 $x=0$ 为无穷间断点.

当 $x\to 1^+$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}=1$；

当 $x\to 1^-$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}=0$，故 $x=1$ 为跳跃间断点.

2 综合题 (每小题 7 分，共 28 分)

11. **Solution**. 在方程 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=f^2(0)$，因 $f(0)\neq 0$，所以 $f(0)=1$.

任取 $x_0\in\mathbf{R}$，在方程 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 中令 $x=x_0$，得 $f(x_0+y)=f(x_0)\cdot f(y)$. 令 $y\to 0$，得

$$\lim_{y\to 0}f(x_0+y)=f(x_0)\cdot\lim_{y\to 0}f(y)=f(x_0)\cdot f(0)=f(x_0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 由 x_0 的任意性可知 $f(x)$ 处处连续.

12. **Solution**. 设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+1$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(\mathrm{e})=1>0$，$f(0^+)=-\infty$，$f(\mathrm{e}^3)=4-\mathrm{e}^2<0$，所以方程 $\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+1=0$ 有两个实根.

13. **Solution**.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(2+\frac{1}{x}\right)}{f(2)}\right]^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln f\left(2+\frac{1}{x}\right)-\ln f(2)\right]}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln f(2+t)-\ln f(2)}{t}}$$

$$= \mathrm{e}^{(\ln f(t))'\big|_{t=2}} = \mathrm{e}^{\frac{f'(2)}{f(2)}}.$$

14. **Solution**. 由几何关系，$V=\dfrac{1}{3}\cdot 8\cdot 8\pi-\dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{(8-h)^3}{8}$. 方程两边对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3(8-h)^2}{8}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi(8-h)^2}{8}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

将 $h=6\mathrm{m}$，$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4}{\pi}\mathrm{m/min}$ 代入上式得 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$.

3 证明题 (每小题 6 分，共 12 分)

15. **Proof**. 取对数，即证 $\ln\dfrac{1-x}{1+x}<-2x(0<x<1)$.

令 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+2x$，则 $f'(x)=-\dfrac{2}{1-x^2}+2=-\dfrac{2x^2}{1-x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

因为 $f(0)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $\dfrac{1-x}{1+x}<\mathrm{e}^{-2x}$.

16. **Proof**. 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，则函数 $f(x),g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $g(x)\neq 0$. 由 Cauchy 中值定理，存在 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{\frac{\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_1}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\frac{\frac{1}{\xi}\cdot\xi-\ln\xi}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=\ln\xi-1,$$

化简得 $x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=(\ln\xi-1)(x_1-x_2)$.