CHAPTER 1

2018-2019 学年微积分（一）（上）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^{\alpha}}$，其中 $\alpha\in(0,1)$.

2. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2\tan x}+\sin x^{2}\right)}{x}$.

3. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax+bx+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=2$，求常数 a,b 的值.

5. 设可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $y+y\mathrm{e}^x=2\cos y\sin x-4x$ 确定，求 $y'(0)$.

6. 求曲线 $r=2\sin3\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

7. 设函数 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$，求微分 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

8. 设函数 $y=x+x^3$ 的反函数为 $x=g(y)$，求 $g''(2)$.

9. 设 $y=x^2\cos 2x$，求 $y^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=t\cos t-\sin t, \\ y=\cos t \end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. 讨论函数 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{x^2-1}$ 的连续性，并对函数的间断点判别类型.

12. 求无穷小量 $u(x)=\left(\frac{1+2\cos x}{3}\right)^{x^2}-1(x\to 0)$ 的主部和阶数.

13. 求函数与 $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geq 0, \\ x, & x<0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

14. 已知 $a>1$，$n\geq 1$，证明不等式 $\dfrac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}}{\ln a}<\dfrac{\sqrt[n]{a}}{n^2}$.

15. 一架飞机在 H 米高空以 a 米/秒的速度水平匀速飞行. 设在 $t=0$ 时刻有一探照灯位于飞机正下方的地面上跟踪飞机. 问 t 秒以后探照灯应以怎样的角速度转动才能照到飞机？

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1=1$，$x_{n+1}=x_n+\dfrac{2}{x_n^2}$ 给出. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

17. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有定义并且对于任何 $x,y\in[a,b](x\neq y)$ 成立

$$|f(x)-f(y)|\leq M(x-y)^2,$$

其中 M 为常数. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

CHAPTER 2

2019-2020 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 因 $\frac{n}{n+n^\alpha} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k^\alpha} < 1$，而 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^{\alpha-1}} = 1$，

   由夹逼定理知 $l = 1$.

2. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2\tan x} + \sin x^2\right)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2\tan x} + \sin x^2 - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x + \sin x^2}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} \\
&=2.
\end{aligned}
$$

3. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to 0^+} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\ln x}} \\
&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\mathrm{e}^x}{x}} \\
&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x} = \mathrm{e}.
\end{aligned}
$$

4. **Solution**. 计算

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{ax+bx+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} &= \lim_{x\to 1} \frac{[(a+b)x+b]\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{(3x+1)-(x+3)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2[(a+b)x+b]}{x-1} \\
&=2.
\end{aligned}
$$

因此有 $\begin{cases} a+2b=0, \\ a+b=1. \end{cases}$ 解得 $a=2, b=-1$.

5. **Solution**. 方程两边对 x 求导得到

$$y' + y'\mathrm{e}^x + y\mathrm{e}^x = -2\sin y \sin x \cdot y' + 2\cos y \cos x - 4,$$

代入 $x = 0, y = 0$ 解得 $y'(0) = -1$.

6. **Solution**. 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2\sin 3\theta \cos\theta, \\ y = 2\sin 3\theta \sin\theta. \end{cases}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \dfrac{6\cos 3\theta \sin\theta + 2\sin 3\theta \cos\theta}{6\cos 3\theta \cos\theta - 2\sin 3\theta \sin\theta}$.

代入 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 得切线斜率 $k = \sqrt{3}$，又切点坐标为 $(0,0)$，所以切线方程为 $y = \sqrt{3}x$.

7. **Solution**. $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}$,

所以 $\mathrm{d}y|_{x=0} = f'(0)\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x$.

8. **Solution**. $g'(y) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \dfrac{1}{1+3x^2}$,

$g''(y) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(g'(y)\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g'(y)\right) \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{6x}{(1+3x^2)^3}$.

代入 $x = 1, y = 2$ 得 $g''(2) = -\dfrac{3}{32}$.

9. **Solution**. 利用 Leibniz 法则得到

$$\begin{aligned} y^{(5)} =& x^2\left(\cos 2x\right)^{(5)} + 5 \cdot 2x\left(\cos 2x\right)^{(4)} + 10 \cdot 2\left(\cos 2x\right)^{(3)} \\ =& -32x^2 \sin 2x + 160x\cos 2x + 160\sin 2x. \end{aligned}$$

代入 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 得 $y^{(5)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -80\pi$.

10. **Solution**. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{-\sin t}{\cos t - t\sin t - \cos t} = \dfrac{-\sin t}{-t\sin t} = \dfrac{1}{t}$.

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{t^2} \cdot \dfrac{1}{-t\sin t} = \dfrac{1}{t^3\sin t}$.

2 综合题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**. 函数 $f(x)$ 的间断点为 $-1, 1$. 因

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1}\frac{\sin\pi x}{x^2-1} &= \lim_{x\to-1}\frac{\pi\cos\pi x}{2x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-2} = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x^2-1} &= \lim_{x\to1}\frac{\pi\cos\pi x}{2x} = \frac{\pi\cos\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

所以 $x = -1, 1$ 均为可去间断点.

12. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
u = \left(\frac{1+2\cos x}{3}\right)^{x^2} - 1 = \exp\left(x^2 \ln \frac{1+2\cos x}{3}\right) - 1 \\
&\sim x^2 \ln \frac{1+2\cos x}{3} \\
&\sim \frac{2x^2}{3}(\cos x - 1) \\
&\sim -\frac{1}{3}x^4.
\end{aligned}
$$

所以 u 的主部为 $-\frac{1}{3}x^4$，阶数为 4.

13. **Solution**. 当 $x > 0$ 时，$f'(x) = \frac{1}{1+x}$；当 $x < 0$ 时，$f'(x) = 1$；

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$，所以 $f'(0) = 1$.

因此

$$
f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & x > 0, \\ 1, & x \le 0. \end{cases}
$$

当 $x \neq 0$ 时，$f'(x)$ 显然连续；

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$，所以 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

因此 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续.

14. **Solution**. 令 $f(x) = a^x$,显然 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 内可导. 由 Lagrange 中值定理知存在 $\xi \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ 使得

$$
\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{a^{\xi}\ln a}{n(n+1)} < \frac{a^{\frac{1}{n}}\ln a}{n^2},
$$

即 $\frac{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}}{\ln a} < \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}$.

15. **Solution**. 设飞机飞过的距离为 x 米，飞机与探照灯的连线与竖直方向的夹角为 θ.

由几何关系有 $x = H\tan\theta$，故

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a = H\sec^2\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.
$$

当前时刻 $x = at$，故 $\sec\theta = \frac{\sqrt{H^2 + a^2t^2}}{H}$，代入上式得

$$
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{aH}{H^2 + a^2t^2}.
$$

3 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

16. **Proof**.

显然 $x_{n+1} - x_n = \frac{2}{x_n^2} > 0$，即 $\{x_n\}$ 严格单调增加.

若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a = a + \frac{2}{a^2}$，此方程无解，矛盾.

因此 $\{x_n\}$ 无界.

17. **Proof**. 由题可知，$\forall x, y \in [a,b](x \neq y)$，有 $0 \leq \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M|x-y|$.

当 $x \to y$ 时，$M|x-y| \to 0$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to y}\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = 0$，即 $f'(x)=0$.

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.