CHAPTER 1

2020-2021 学年微积分（一）（上）期中考试

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则【　】.

   A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$
   B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$
   C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+x_n^2\right)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$
   D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$=【　】.

   A. 1
   B. e
   C. e^{a-b}
   D. e^{b-a}

3. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，其中 $f'(0)=1$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的【　】.

   A. 连续点
   B. 可去间断点
   C. 无穷间断点
   D. 跳跃间断点

4. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$=【　】.

   A. $-2f'(0)$
   B. $-f'(0)$
   C. $f'(0)$
   D. 0

5. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，$F(x)=f(x)\,(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的【　】.

   A. 充分必要条件
   B. 充分条件但非必要条件
   C. 必要条件但非充分条件
   D. 既非充分又非必要条件

6. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则【　】.

   A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
   B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
   C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
   D. $f'(0)$ 是 $f'(x)$ 的极值

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right] =$ ________________.

8. 设 $y=\dfrac{\cos x}{x^2}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)} =$ ________________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right) =$ ________________.

10. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=cx^3$，在 $x\to 0$ 时，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，求常数 a,b,c 的值.

12. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 设 $\begin{cases} x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

14. 设 $y = \dfrac{x^2}{2-x}$，计算 $y^{(50)}(0)$.

15. 设 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = x\ln x$ 的反函数，计算 $\varphi(y)$ 在 $x = \mathrm{e}$ 处的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}$.

16. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 如果以每秒 $50\mathrm{cm}^3$ 的速度匀速给一个气球充气，假设气球内气压保持常值且形状始终为球形，问当气球的半径为 5cm 时，气球半径增加的速率是多少？

18. 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$，$f(0)<0$，讨论 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x\neq 0)$ 的单调性.

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$（$n$ 个根式，$a>0$），证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in(0,2)}\{|f(x)|\}$. 证明：$\exists\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$.

CHAPTER 2

2020-2021 学年微积分（一）（上）期中考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.

   设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，分别解方程 $\sin A = 0$，$A + \sqrt{|A|} = 0$，$A + A^2 = 0$，$A + \sin A = 0$，只有 $A + \sin A = 0$ 具有唯一解 $A = 0$.

2. **Solution**. C.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x &= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^x\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}\cdot\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{(a-b)x^2+abx}{x^2+(b-a)x-ab}}\\ &= \mathrm{e}^{a-b}.\end{aligned}$$

3. **Solution**. B.

   因

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1,$$

   且 $F(0) = 0$，所以 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的可去间断点.

4. **Solution**. B.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x} - 2\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]\\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).\end{aligned}$$

5. **Solution**. A.

若 $f(0)=0$，$F(0)=0$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}(1+|\sin x|)\\&=f'(0),\end{aligned}$$

即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ 存在. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}f(x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}\\&=f'(0)+f(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$ 不存在，所以必须 $f(0)=0$.

因此 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件.

6. **Solution**. B.

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，由极限的保号性知存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$f''(x)\geq 0$ 恒成立.

利用 Taylor 展开，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2\geq f(0),\quad -\delta<x<\delta,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. 0.

利用 $\dfrac{1}{x}\leq\left[\dfrac{1}{x}\right]\leq\dfrac{1}{x}+1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{1}{x}=1=\lim\limits_{x\to 0}x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$，

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

8. **Solution**. $\dfrac{x\sin x+2\cos x}{x^3\sin x}$.

由链式法则知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(\cos x)}&=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}}\\&=\frac{\frac{-x^2\sin x-2x\cos x}{(x^2)^2}}{-\sin x}\\&=\frac{x\sin x+2\cos x}{x^3\sin x}.\end{aligned}$$

9. **Solution**. -1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+o(x^2)}{x^2}\\&=-1.\end{aligned}$$

10. **Solution**. $y=x+2$.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\dfrac{2}{x}=2.$

故斜渐近线方程为 $y=x+2$.

3 基本计算题 (每小题 6 分，共 30 分)

11. **Solution**. 利用 Taylor 公式，

$$\begin{aligned}f(x)=&x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\=&(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，故 $1+a=0$，$b-\dfrac{a}{2}=0$，$\dfrac{a}{3}=c$.

解得 $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$c=-\dfrac{1}{3}$.

12. **Solution**. 当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x^4+1}$.

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$.

因 $\lim\limits_{x\to0}\left(\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}=f'(0)$，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

13. **Solution**. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$.

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{1}{\cos t}$.

当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

14. **Solution**. $y=\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{(2-x)^2-4(2-x)+4}{2-x}=\dfrac{4}{2-x}-2-x$.

利用 $\left(\dfrac{1}{a-x}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$，得

$$y^{(50)}(0)=\left(\frac{4}{2-x}\right)^{(50)}\Bigg|_{x=0}-0=\frac{4\cdot 50!}{2^{51}}=\frac{50!}{2^{49}}.$$

15. **Solution**. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\ln x+1}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{1}{\ln x+1}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{\ln x+1}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{1}{x(\ln x+1)^3}$.

   当 $x=\mathrm{e}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{1}{8\mathrm{e}}$.

16. **Solution**. $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，故 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 内的极值点为 $x=-1$.

   计算 $f(-2)=3$，$f(-1)=10$，$f(2)=-17$.

   故 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 10，最小值为 -17.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 设气球的半径为 r，体积为 V，则 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

   由题意得 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=50$，故

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}=\frac{50}{4\pi r^2}.$$

   当 $r=5\mathrm{cm}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{50}{100\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{cm/s}$.

18. **Solution**. $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，令 $G(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $G'(x)=xf''(x)$.

   由 $f''(x)>0$ 知 $G'(x)=0$ 具有唯一解 $x=0$，且 $G(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

   因 $G(0)=-f(0)>0$，所以 $G(x)>0$ 恒成立，故 $F'(x)=\dfrac{G(x)}{x^2}>0$ 恒成立，

   即 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由题可知 $x_1=\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$.

   显然 $x_1=\sqrt{a}<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 设 $x_k\leq\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，则

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}\leq\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

   所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$x_n\leq\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，即 $\{x_n\}$ 有上界.

   又因为

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{a+x_n}-x_n=\frac{a+x_n-x_n^2}{\sqrt{a+x_n}+x_n}=-\frac{(x_n-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2})(x_n-\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2})}{\sqrt{a+x_n}+x_n}\geq 0,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递增，故 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $A = \sqrt{a+A}$，解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

20. **Proof**. 假设 $\forall x \in (0,2)$，$|f'(x)| < M$.

由 Lagrange 中值定理，$\exists \eta, \delta \in (0,2)$，$|f(x)| = |f'(\eta)|x$，$|f(x)| = |f'(\delta)|(x-2)$.

所以 $|f(x)| < Mx$，$|f(x)| < M(2-x)$，相加得 $|f(x)| < M$，这与 $M = \max\limits_{x\in(0,2)}\{|f(x)|\}$ 矛盾.

所以 $\exists \xi \in (0,2)$，使得 $|f'(\xi)| \geq M$.