
CHAPTER 1

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \right)$.

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\tan x}}{\ln(1 + \sin^3 x)}$.

3. 设 $y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}$, 求 $dy|_{x=1}$.

4. 已知曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \end{cases}$, 求该曲线在对应 $t = 1$ 的点 P 处的切线方程.

5. 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $u = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 的主部和阶数.

6. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性, 若有间断点, 指出其类型.

7. 试确定常数 a, b , 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (a + bx)}{x} = 0$.

8. 已知函数 $y = f(\sin^2 x)$, 其中 $f(u)$ 二阶可导, 求 y'' .

9. 设 $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$, 要使 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 求正整数 n 的取值范围.

10. 设 $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$, 求 $f^{(6)}(0)$.

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^3}{6}$ 与 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=1}$.

12. 设 $f(x)$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$, 且 $f(x) \neq 0$. 若任给 x, y 总有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 且 $f'(0) = \lambda$, 讨论 $f(x)$ 的可导性, 并求 $f(x)$.

13. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) = 2$, 求 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
14. 设函数 $f(u)$ 二阶可导且 $f'(u) \neq 0$, 若 $x = \varphi(y)$ 为 $y = f(\ln x)$ 的反函数, 求 $\frac{d^2x}{dy^2}$.
15. 利用不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 研究数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 的收敛性.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设常数 $\alpha > 1$, 证明方程 $\alpha x = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.
17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(0) = f(1) = 0, f(\theta) = 1, \theta \in (0, 1)$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) - f(\xi) + \xi = 1$.

CHAPTER 2

2025-2026 学年微积分 (B) (上) 期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 记和式 $\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2+\sqrt{n}}$ 为 A_n , 因为

$$\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+\sqrt{n}} < A_n < \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+1},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{2}$, 由夹逼准则得

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{2}.$$

2. **Solution.**

$$\begin{aligned} l &= - \lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{e^{\tan x - x} - 1}{\sin^3 x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. **Solution.**

$$y = \arctan e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}),$$

$$dy = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + e^{2x}} e^{2x} \cdot 2 dx = \frac{e^x - 1}{1 + e^{2x}} dx,$$

$$dy|_{x=1} = \frac{e - 1}{1 + e^2} dx.$$

4. **Solution.** 对应 $t = 1$ 的点 P 为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'_t}{x'_t} \\ &= \frac{\frac{6t(1+t^3)-9t^4}{(1+t^3)^2}}{\frac{3(1+t^3)-9t^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^3}. \end{aligned}$$

曲线在点 P 的切线斜率为 $k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = -1$, 故切线方程为

$$y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{或} \quad x + y = 3.$$

5. Solution.

法一. 设 u 的主部为 $cx^k (c \neq 0, k > 0)$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{cx^k} = 1.$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{cx^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \arcsin x}{cx^k(\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x})} \\ &= \frac{1}{2c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \arcsin x}{x^k} = \frac{1}{2c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^2}{x^k} = \frac{3}{4c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^k}, \end{aligned}$$

要使 $\frac{3}{4c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^k} = 1$, 必有 $k = 2, c = \frac{3}{4}$.

综上所述, 无穷小量 $u = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 的主部为 $\frac{3}{4}x^2$, 阶数为 2.

法二. 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x} = \frac{1 - \cos x + x \arcsin x}{\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x}} \\ &\sim \frac{1}{2}(1 - \cos x + x \arcsin x) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 + x^2 \right) = \frac{3}{4}x^2. \end{aligned}$$

综上所述, 无穷小量 $u = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 的主部为 $\frac{3}{4}x^2$, 阶数为 2.

6. Solution. 当 $x < 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x$;

当 $x = 0$ 时, $f(0) = \frac{1}{2}$;

当 $x > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xe^{-nx} + 1}{e^{-nx} + 1} = 1$.

因此 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$, 在区间 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 连续.

因 $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

7. Solution. 由题意知 $\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (a + bx) = o(x)$, ($x \rightarrow 0$).

首先, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (a + bx)) = 0$, 计算极限可得 $a = 2$.

其次, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - (2 + bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - 2}{x} - b \right) = 0$, 可得

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 3} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - 1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)^4 + 3} + 2} = 1.$$

8. Solution. $y' = f'(\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x = f'(\sin^2 x) \cdot \sin 2x$,

$$y'' = f''(\sin^2 x) \cdot \sin^2 2x + 2 \cos 2x \cdot f'(\sin^2 x).$$

9. **Solution.** 要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$.

要使 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \cos \frac{1}{x}$ 存在, 必有 $n > 1$, 此时 $f'(0) = 0$.

$x \neq 0$ 时, $f'(x) = nx^{n-1} \cos \frac{1}{x} + x^{n-2} \sin \frac{1}{x}$. 当 $n > 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} \cos \frac{1}{x} + x^{n-2} \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \sin \frac{1}{x},$$

欲使上式极限为 0, 必有正整数 $n > 2$.

综上所述, 当且仅当正整数 $n > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

10. **Solution.** 因为 $f(x) = 1 - 2 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$,

所以

$$\begin{aligned} f^{(6)}(x) &= 4^5 \cos \left(4x + \frac{6\pi}{2} \right) = -4^5 \cos 4x, \\ f^{(6)}(0) &= -1024. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. **Solution.** 当 $t=0$ 时, $x=1, y=1, x'_t = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} \neq 0$.

对方程 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 两边关于 t 求导得

$$e^y \frac{dy}{dt} \sin t + e^y \cos t - \frac{dy}{dt} = 0,$$

解得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(1 + t^2)}, \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} &= \left. \frac{2e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(1 + t^2)} \right|_{t=0} = 2e. \end{aligned}$$

12. **Solution.** 由条件 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 得 $f(0) = f^2(0)$, $f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right)$. 因 $f(x) \neq 0$, 故 $f(x) > 0$, $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x)f(y) - f(x)}{y} \\ &= f(x) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f(x)f'(0) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

因此函数 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x) = \lambda f(x)$.

因为 $f'(x) - \lambda f(x) = 0$, 所以

$$(e^{-\lambda x} f(x))' = e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x) = 0,$$

从而 $e^{-\lambda x} f(x) \equiv k$, 由 $f(0) = 1$ 得 $k = 1$, $f(x) = e^{\lambda x}$.

13. **Solution.** 由题设条件得 $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{2} f''(0) = 1.\end{aligned}$$

所以

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e.$$

14. **Solution.**

法一. 因 $\frac{dy}{dx} = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$, 所以 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{x}{f'(\ln x)}$.

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{x}{f'(\ln x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{f'(\ln x)} \right) \cdot \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{f'(\ln x) - x \cdot (f''(\ln x) \cdot \frac{1}{x})}{(f'(\ln x))^2} \cdot \frac{x}{f'(\ln x)} \\ &= \frac{x(f'(\ln x) - f''(\ln x))}{(f'(\ln x))^3}.\end{aligned}$$

法二. 对 $y = f(\ln x)$ 两边关于 y 求导得

$$1 = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dy}, \quad (*)$$

解得 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{f'(\ln x)}$.

式 (*) 变形得 $x = f'(\ln x) \cdot \frac{dx}{dy}$, 两边关于 y 再求导得

$$\frac{dx}{dy} = f'(\ln x) \frac{d^2x}{dy^2} + f''(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{dx}{dy} \right)^2,$$

解得

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{dx}{dy} - \frac{f''(\ln x)}{x} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}{f'(\ln x)} = \frac{x(f'(\ln x) - f''(\ln x))}{(f'(\ln x))^3}.$$

15. **Solution.** $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 0$,

因此数列 $\{x_n\}$ 单调减少.

$$\begin{aligned}x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \left(1 + \frac{1}{1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0,\end{aligned}$$

即数列 $\{x_n\}$ 有下界 0, 由单调有界收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. **Proof.** 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \alpha \cos x$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续.

因为 $f(0^+) = 1 - \alpha < 0$, 所以 $\exists x_1 \in (0, \delta)$ (δ 是足够小的正数), $f(x_1) < 0$.

而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} > 0$, 显然 $f(x)$ 在 $\left[x_1, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 由零点定理知存在 $\xi \in \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$,

使得 $f(\xi) = 0$ 即 $\alpha\xi = \tan \xi$, 故方程 $\alpha x = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

17. **Proof.** 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(\theta)F(1) = -(1 - \theta) < 0$,

由零点定理可得, 存在 $c \in (\theta, 1)$, 使得 $F(c) = 0$.

再令 $G(x) = e^{-x}F(x)$, 因为 $G(0) = G(c) = 0$, 由 Rolle 定理得存在 $\xi \in (0, c) \subset (0, 1)$, 使得

$$G'(\xi) = 0.$$

注意 $G'(x) = e^{-x}(f'(x) - 1 - f(x) + x)$, 有 $f'(\xi) - f(\xi) + \xi = 1$.