CHAPTER 1

2016-2017 学年微积分（一）（上）期末考试

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列命题正确的是【　】.

   A. 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散　　**B.** 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{y_n\}$ 必收敛

   C. 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小　　**D.** 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \neq 0$，$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的【　】.

   A. 连续点　　**B.** 跳跃间断点　　**C.** 无穷间断点　　**D.** 可去间断点

3. 当 $x \to 1$ 时，无穷小量 $\ln x^2$ 的无穷小主部为【　】.

   A. x　　**B.** x^2-1　　**C.** $2(1-x)$　　**D.** $2(x-1)$

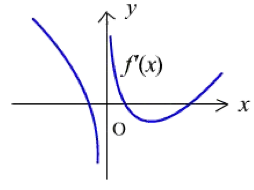
4. 若函数 $f(x)$ 在原点处连续，$F(x) = f(x)|\sin x|$，则 $f(0)=0$ 是 $F'(0)$ 存在的【　】.

   A. 充要条件　　**B.** 充分但非必要条件

   C. 必要但非充分条件　　**D.** 既非充分也非必要条件

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导函数图形如右图所示，则 $f(x)$ 的极值点的个数为【　】.

   A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4



6. 若函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arctan\dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$，则直线【　】不是此函数的渐近线.

   A. $x=0$　　**B.** $y = 1-\dfrac{\pi}{4}$　　**C.** $x=2$　　**D.** $y=1+\dfrac{\pi}{4}$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{\sin x^3}=$ ____________.

8. $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^{99}\mathrm{d}x=$ __________________.

9. 设点 $(1,4)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$ ____________，$b=$ ____________.

10. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x^3}{1+\sin^4 x}+\sin^4 x\cos x\right)\mathrm{d}x=$ __________________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定的隐函数，求导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 确定，求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

13. 求定积分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^5 x\sqrt{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

14. 求极限 $l = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

15. 求微分方程 $y' - \mathrm{e}^{x-y} = 1$ 的通解.

16. 求反常积分 $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x^2}\mathrm{d}x$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设曲线段 $y = ax^2 (a > 0, 0 \le x \le 1)$ 与 x 轴及直线 $x = 1$ 围成一个曲边三角形 A，图形 A 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积记为 V_1，图形 A 绕直线 $x = 1$ 旋转一周得到的旋转体的体积记为 V_2，求 a 取何值时体积差 $V_2 - V_1$ 最大？

18. 应用微分学知识讨论方程 $x\ln x + a = 0$ 的根问题：

（1）a 取何值时，该方程有一个实根？

（2）a 取何值时，该方程有两个实根？

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$（$a>0$）上有二阶连续导数，并且在区间内部取得最小值 -1，$f(a)=f(b)=1$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{16}{(b-a)^2}$.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上单调递减的连续函数，则有 $\displaystyle\int_a^b (x-a)^3 f(x)\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^3}{4}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

CHAPTER 2

2016-2017 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.

   对于 A 选项，考虑 $x_n = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1 \end{cases}$，$y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ n, & n = 2k-1 \end{cases}$，其中 $k \in \mathbf{N}^+$，

   则 $x_n y_n \equiv 0$，但 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均发散.

   对于 B，C 选项，考虑 $x_n = 0$，$y_n = n$，则 $x_n y_n \equiv 0$，$\{x_n\}$ 收敛、有界，但 $\{y_n\}$ 发散.

   对于 D 选项，即存在 $M > 0$ 使得 $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| \le M$ 对任意的 n 成立，

   所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x_n y_n|}{|x_n|} \le \lim\limits_{n\to\infty} M|x_n y_n| = 0$，故 $\{y_n\}$ 为无穷小.

2. **Solution**. A.

   由题意可知 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = a = g(0)$，

   所以函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

3. **Solution**. D.

   设 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{c(x-1)^k} = 1$，则

   $$\begin{aligned} 1 = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{c(x-1)^k} &= \lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{c(x-1)^k} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2}{ck(x-1)^{k-1}x} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{ck(x-1)^{k-1}}. \end{aligned}$$

   所以 $k = 1$，$c = 2$，无穷小主部为 $2(x-1)$.

4. **Solution**. A.

   若 $f(0) = 0$，因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

又 $F(0)=0$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)|\sin x|}{x}\\&=\lim_{x\to 0}f(x)\cdot\frac{|\sin x|}{x}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，且 $\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $x\to 0$ 时是有界变量，无穷小量乘有界变量仍为无穷小量，故 $F'(0)=0$，即 $F'(0)$ 存在.

若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ 存在，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)|\sin x|}{x}$ 存在.

分别考察左右极限：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}f(x)\frac{\sin x}{x}=f(0)\cdot 1=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}f(x)\frac{-\sin x}{x}=f(0)\cdot(-1)=-f(0).$$

因为极限存在，左右极限必须相等，所以 $f(0)=-f(0)$，解得 $f(0)=0$.

因此 $f(0)=0$ 是 $F'(0)$ 存在的充要条件.

5. **Solution**. D.

   由图可知 $f'(x)$ 在 $x<0$ 时有一次变号，在 $x>0$ 时有两次变号，并且 $f'(0^-)<0$，$f'(0^+)>0$，所以 $x=0$ 也是 $f(x)$ 的极值点. 故 $f(x)$ 的极值点的个数为 4.

6. **Solution**. C.

   因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的竖直渐近线.

   又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2^{\frac{1}{x}}+\arctan\dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}\right]=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\dfrac{-x^2}{(x-1)(x-2)}=1-\dfrac{\pi}{4}$，

   $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^{\frac{1}{x}}+\arctan\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}\right]=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}=1+\dfrac{\pi}{4}$.

   所以 $y=1-\dfrac{\pi}{4}$ 与 $y=1+\dfrac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 的水平渐近线.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\dfrac{1}{3}$.

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

8. **Solution**. $\dfrac{1}{10100}$.

   令 $1-x=u$，则 $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^{99}\mathrm{d}x=\int_1^0(1-u)u^{99}(-\mathrm{d}u)=\int_0^1(u^{99}-u^{100})\mathrm{d}u=\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{1}{10100}$.

9. **Solution**. $a=-2$，$b=6$.

   $y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$.

   所以 $y''(1)=6a+2b=0$，$y(1)=a+b=4$，解得 $a=-2$，$b=6$.

10. **Solution**. $\dfrac{2}{5}$.

由于 $y=\dfrac{x^3}{1+\sin^4 x}$ 是奇函数，所以 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^3}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=0$.

故

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x^3}{1+\sin^4 x}+\sin^4 x\cos x\right)\mathrm{d}x=&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\mathrm{d}x\\ =&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}\sin x\\ =&\frac{2}{5}\sin^5 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0.$$

将 $x=0$，$y=f(0)=1$ 代入上式，得 $\mathrm{e}(2+y'|_{x=0})=0$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-2$.

12. **Solution**. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3(1+t)}{2}$,

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{3(1+t)}{2}\right)'\cdot\dfrac{1}{2-2t}=\dfrac{3}{4(1-t)}$.

13. **Solution**.

$$\begin{aligned}I=&\int_0^{\pi}\sin^5 x|\cos x|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5 x(-\cos x)\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5 x\mathrm{d}\sin x\\ =&\frac{1}{6}\sin^6 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{6}\sin^6 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

14. **Solution**.

$$\begin{aligned}l=&\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\right\}\\ =&\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\\ =&\exp\left[\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\right]=\exp\left[x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\right]\\ =&\exp\left[\ln 2-1+\ln(1+x)\Big|_0^1\right]=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

15. **Solution**.

法一. 令 $u=y-x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1$，原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-u}$，即 $\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，

两边积分得 $e^u = x + C$，所以原方程的通解为 $e^{y-x} = x + C$.

法二. 方程两边同乘 e^y，得 $e^y y' - e^x = e^y$，即 $(e^y)' = e^x + e^y$.

这是一个关于 e^y 的一阶非齐次线性微分方程，由通解公式得

$$\begin{aligned} e^y &= e^{-\int -\mathrm{d}x}\left(C + \int e^x e^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x\left(C + \int \mathrm{d}x\right) = e^x(x + C). \end{aligned}$$

16. **Solution**. 令 $u = \sqrt{x} + 1$，则 $x = (u-1)^2$，$\mathrm{d}x = 2(u-1)\mathrm{d}u$，

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)^4} \cdot 2(u-1)\mathrm{d}u = 2\int_2^{+\infty} \frac{\ln u}{(u-1)^3}\mathrm{d}u \\ &= -\int_2^{+\infty} \ln u \mathrm{d}\frac{1}{(u-1)^2} = -\left.\frac{\ln u}{(u-1)^2}\right|_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u(u-1)^2}\mathrm{d}u \\ &= \ln 2 + \int_2^{+\infty} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right]\mathrm{d}u \\ &= \ln 2 + \left[\ln\frac{u}{u-1} - \frac{1}{u-1}\right]_2^{+\infty} = \ln 2 - \ln 2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. $V_1 = \int_0^1 \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi a^2 \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{5}$，$V_2 = \int_0^a \pi(1-x)^2 \mathrm{d}y = 2\pi a \int_0^1 (1-x)^2 x \mathrm{d}x = \frac{\pi a}{6}$.

故 $V_2 - V_1 = \frac{\pi a}{6} - \frac{\pi a^2}{5}$. 令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(V_2 - V_1) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi a}{5} = 0$，解得 $a = \frac{5}{12}$.

由于 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}(V_2 - V_1) = -\frac{2\pi}{5} < 0$，所以当 $a = \frac{5}{12}$ 时，体积差 $V_2 - V_1$ 最大.

18. **Solution**. 令 $f(x) = x\ln x$，则 $f'(x) = \ln x + 1$，

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时，$f'(x) < 0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x > \frac{1}{e}$ 时，$f'(x) > 0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$，$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$，$f(+\infty) = +\infty$.

（1）当 $-a \geq 0$ 或 $-a = -\frac{1}{e}$，即 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时，方程 $x\ln x + a = 0$ 有一个实根.

（2）当 $-a \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$，即 $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时，方程 $x\ln x + a = 0$ 有两个实根.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由题意可知，存在 $c \in (a, b)$，使得 $f'(c) = 0$ 且 $f(c) = -1$.

由 Taylor 公式，

$$\begin{aligned} f(a) - f(c) = 2 = f'(c)(a-c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a-c)^2 = \frac{f''(\xi_1)}{2}(c-a)^2, \\ f(b) - f(c) = 2 = f'(c)(b-c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2 = \frac{f''(\xi_2)}{2}(b-c)^2, \end{aligned}$$

其中 ξ_1,ξ_2 介于 a 与 b 之间. 上述两式即 $f''(\xi_1)=\dfrac{16}{[2(c-a)]^2}$，$f''(\xi_2)=\dfrac{16}{[2(b-c)]^2}$.

记 $M=\max\{2(c-a),2(b-c)\}$，$N=\min\{2(c-a),2(b-c)\}$，则 $N\le b-a\le M$，

所以 $\dfrac{16}{M^2}\le\dfrac{16}{(b-a)^2}\le\dfrac{16}{N^2}$.

因为 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由介值定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{16}{(b-a)^2}$.

20. **Solution**. 令 $F(t)=\displaystyle\int_a^t(x-a)^3f(x)\mathrm{d}x-\frac{(t-a)^3}{4}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$（$a\le t\le b$），

则

$$\begin{aligned}F'(t)=&(t-a)^3f(t)-\frac{3(t-a)^2}{4}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{(t-a)^3}{4}f(t)\\=&\frac{3(t-a)^3}{4}f(t)-\frac{3(t-a)^2}{4}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\\=&\frac{3(t-a)^2}{4}\left[(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

由积分中值定理，存在 $\xi\in(a,t)$ 使得 $\displaystyle\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=(t-a)f(\xi)$，

所以 $F'(t)=\dfrac{3(t-a)^2}{4}\left[(t-a)f(t)-\displaystyle\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right]=\dfrac{3(t-a)^3}{4}[f(t)-f(\xi)]$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，所以 $f(t)\le f(\xi)$，故 $F'(t)\le 0$，$F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减.

因此 $F(b)\le F(a)=0$，即 $\displaystyle\int_a^b(x-a)^3f(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^3}{4}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.