CHAPTER 1

2019-2020 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设 $0 < a_n < 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$，则以下数列中无界的是【　】.

   A. $\{a_n^2\}$　　**B.** $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$　　**C.** $\left\{\tan\dfrac{\pi a_n}{2}\right\}$　　**D.** $\{\ln a_n\}$

2. 已知 $f(2) = 3$，$f'(2) = 5$，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(2+h)-9}{h} =$【　】.

   A. 30　　**B.** 10　　**C.** 6　　**D.** 0

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，则以下说法中**错误**的是【　】.

   A. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有界　　**B.** $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有连续的导数
   C. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上连续　　**D.** $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上可积

4. 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)$ 一共有【　】条渐近线.

   A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

5. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x) < 0$，则以下不等式中一定成立的是【　】.

   A. $f(1)+f(3) > 2f(2)$　　**B.** $f(1)+f(3) < 2f(2)$
   C. $f(1)+f(2) > 2f(3)$　　**D.** $f(1)+f(2) < 2f(3)$

6. 微分方程 $y' - \dfrac{y}{2x} = 0$ 满足初值条件 $y(1) = 2$ 的特解为【　】.

   A. $2\sqrt{x}$　　**B.** $1+\sqrt{x}$　　**C.** $1+x$　　**D.** $\sqrt{x+3}$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)=$ ________________.

8. 设函数 $y=x^2-x$. 在 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时，微分 $\mathrm{d}y=$ ________________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\sqrt{3+t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=$ ________________.

10. 曲线 $y=1-x^4$ 与 x 轴所围成图形的面积为 ________________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 已知当 $x\to 0$ 时，$u=\mathrm{e}^{3x}-ax^2-(1+bx)\cos x$ 是与 x^3 同阶的无穷小. 求常数 a,b 的值.

12. 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

13. 求不定积分 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

14. 求定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

15. 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$ 的敛散性，若收敛求其值.

16. 求微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 满足初值条件 $y(2)=0$，$y'(2)=1$ 的特解.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (-1,0) \cup (0,+\infty), \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

18. 求曲线 $y=\sqrt{x}-\dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ 对应于 $1\le x\le 4$ 弧段的长度.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 n 为正整数，求方程 $(x+1)^{2n}=x^{2n}+1$ 所有的实根. 证明你的结论.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数. 证明：

$$f(x)\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x,\quad x\in[a,b].$$

CHAPTER 2

2019-2020 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. C.

   当 $n \to \infty$ 时，$a_n \to 1$ 且 $0 < a_n < 1$，所以 $\tan\dfrac{\pi a_n}{2} \to +\infty$，数列 $\left\{\tan\dfrac{\pi a_n}{2}\right\}$ 无界.

2. **Solution**. A.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+h)-9}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f^2(2+h)-f^2(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(2+h)-f(2)]\,[f(2+h)+f(2)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}[f(2+h)+f(2)]\\ &=2f(2)f'(2)=30.\end{aligned}$$

3. **Solution**. B.

   $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必然有界，可导则说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，必然可积.

   但可导不一定有连续的导数，故 B 选项错误.

4. **Solution**. D.

   当 $x \to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty$，所以曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 有竖直渐近线 $x=0$.

   当 $x\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=1$，

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)=0$，

   所以曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 有斜渐近线 $y=x$.

   当 $x\to-\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0$，

   所以曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 有水平渐近线 $y=0$.

   故曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线条数为 3.

5. **Solution**. B.

   $f(x)$ 是上凸的，所以 $\dfrac{f(1)+f(3)}{2}<f(2)$，即 $f(1)+f(3)<2f(2)$.

6. **Solution**. A.

   方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{2x}$，两边积分得 $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln x+\ln C$，即 $y=C\sqrt{x}$.

   将初值条件 $y(1)=2$ 代入上式得 $C=2$，所以特解为 $y=2\sqrt{x}$.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\dfrac{1}{4}$.

   由定积分的定义，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\cdots+\frac{n^3}{n^3}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\\
&=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

8. **Solution**. 0.03.

   $\mathrm{d}y=y'(2)\Delta x=(2x-1)\Big|_{x=2}\Delta x=3\Delta x=0.03.$

9. **Solution**. $\sqrt{3}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\sqrt{3+t^2}\mathrm{d}t}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3+\sin^4 x}\cdot 2\sin x\cos x}{2x}\\
&=\sqrt{3}\lim_{x\to0}\cos x=\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

10. **Solution**. $\dfrac{8}{5}$.

    所围成图形的面积 $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{5}$.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 由 Taylor 公式，

$$
\begin{aligned}
u=&\mathrm{e}^{3x}-ax^2-(1+bx)\cos x\\
=&\left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+o(x^3)\right)-ax^2-(1+bx)\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)\\
=&(3-b)x+(5-a)x^2+\frac{9+b}{2}x^3+o(x^3).
\end{aligned}
$$

    因此必然有 $a=5$，$b=3$.

12. **Solution**. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$，令 $f'(x) = 0$ 得到函数在 $(-2, 2)$ 内的驻点为 $x = -1$.

计算 $f(-2) = 3$，$f(-1) = 10$，$f(2) = -17$，所以函数在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 10，最小值为 -17.

13. **Solution**. 令 $u = \mathrm{e}^x$，则 $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{\mathrm{e}^{4x} \cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2 + 1} \mathrm{d}x &= \int \frac{u^4}{u^2 + 1} \mathrm{d}u \\
&= \int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2 + 1} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{u^3}{3} - u + \arctan u + C = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \mathrm{e}^x + \arctan \mathrm{e}^x + C.
\end{aligned}
$$

14. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \mathrm{d} \tan x &= x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}
$$

15. **Solution**. 令 $x = \tan t$，则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t \mathrm{d}t$，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\tan t \sqrt{\tan^2 t + 1}} \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \csc t \mathrm{d}t \\
&= - \ln |\csc t + \cot t| \Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{4}} = - \ln(\sqrt{2} + 1) + \lim_{t \to 0^+} \ln \frac{1 + \cos t}{\sin t} \\
&= + \infty.
\end{aligned}
$$

所以反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} \mathrm{d}x$ 发散.

16. **Solution**. 令 $y' = p$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，

微分方程 $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 变形为 $p \mathrm{d}p = \frac{\sin y}{\cos^3 y} \mathrm{d}y$.

方程两边积分得 $\frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} \sec^2 y + C_1$，将初值条件 $y(2) = 0$，$y'(2) = 1$ 代入上式得 $C_1 = 0$，

所以 $p = \sec y$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sec y$ 或 $\cos y \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$.

方程两边积分得 $x = \sin y + C_2$，将初值条件 $y(2) = 0$ 代入上式得 $C_2 = 2$，

所以特解为 $x = \sin y + 2$ 或 $y = \arcsin(x - 2)$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 当 $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ 时，$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1 + x)}{x^2} = \frac{x - (1 + x) \ln(1 + x)}{x^2 (1 + x)}$.

当 $x = 0$ 时，$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}=f'(0)$，

所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

18. **Solution**.$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

所以 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

故 $s=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^4\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left[2\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\dfrac{1}{2}\left(4+\dfrac{16}{3}-2-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{10}{3}$.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 显然 $x=0$ 是方程 $(x+1)^{2n}=x^{2n}+1$ 的一个实根.

令 $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-1$，则 $f'(x)=2n\left[(x+1)^{2n-1}-x^{2n-1}\right]$.

由于 t^{2n-1} 是严格单增函数，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单增.

因此方程 $(x+1)^{2n}=x^{2n}+1$ 只有唯一实根 $x=0$.

20. **Solution**. 根据积分中值定理，$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

所以

$$
\begin{aligned}
f(x)=&f(\xi)+f(x)-f(\xi)\leq|f(\xi)|+\left|\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\\
\leq&\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\xi^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right|\\
\leq&\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$