
CHAPTER 1

2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 是一数列, 则下列命题正确的是【 】.

- A. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛
D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

2. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1}$ 的间断点及类型是【 】.

- A. $x = -1$ 是第二类间断点
B. $x = 1$ 是第二类间断点
C. $x = \pm 1$ 均是第一类间断点
D. $x = \pm 1$ 均是第二类间断点

3. $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是【 】.

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$
B. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$
C. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
D. $1 - \cos \sqrt{x}$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是【 】.

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在
D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

5. 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ ($x > 0$) 的渐近线条数为【 】.

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

6. 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ 【 】.

- A. 为正常数
B. 为负常数
C. 恒为 0
D. 不为常数

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 对应于 $t=1$ 处的法线方程为 = _____.

8. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right)$ 的拐点是 _____.

9. 曲线 $y = \ln \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为 _____.

10. $y = 2^x$ 的 Maclaurin 展开式中 x^n 项的系数为 _____.

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x - 3}{x - 1} = b$, 求常数 a, b 的值.

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$.

13. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i}$.

14. 计算定积分 $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} (\lambda > 0)$, 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

16. 求微分方程 $xy' + y - e^x = 0$, $y(2) = 1$ 的特解.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$, 求 $f^{(n)}(0)$ 的值 ($n \geq 2$).

18. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又该抛物线与直线 $x = 1$ 及 x 轴围成平面图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 求 a, b, c 的值, 使得该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内只有两个不同的实根.

20. 设 $f''(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 且 $|f''(x)| \leq M$, $f(1) = 0$. 证明:

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{3}.$$

CHAPTER 2

2021-2022 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. **Solution.** B.

考虑函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调不减且有界, 取数列 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则 $x_n \rightarrow 0$,

但当 n 为偶数时, $f(x_n) = 1$; 当 n 为奇数时, $f(x_n) = 0$, 所以 $\{f(x_n)\}$ 发散, A 选项错误.

若 $\{x_n\}$ 单调, 由于 $f(x)$ 单调有界, 所以 $\{f(x_n)\}$ 亦单调有界, 必收敛, B 选项正确.

考虑函数 $f(x) \equiv 0$, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调不减且有界, 取数列 $x_n = n$, 则 $\{x_n\}$ 发散,

但 $\{f(x_n)\} \equiv 0$ 单调不减且收敛, 故 C, D 选项错误.

2. **Solution.** C.

当 $|x| > 1$ 时, $x^n \rightarrow \infty$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1} = 1$;

当 $|x| < 1$ 时, $x^n \rightarrow 0$, 所以 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2}{x^n + 1} = 2$;

当 $x = 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$;

当 $x = -1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^n + 1}$ 不存在.

所以 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1, \\ 2, & |x| < 1, \\ \frac{3}{2}, & x = 1, \\ \text{不存在}, & x = -1 \end{cases}$, 因此 $x = \pm 1$ 均为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 即第一类间断点.

3. **Solution.** C.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$\begin{aligned} 1 - e^{\sqrt{x}} &= -\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) \sim -\sqrt{x}, \\ \sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 &= (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \\ \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} &= \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) \sim x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \\ 1 - \cos \sqrt{x} &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right) \sim \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

4. Solution. D.

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, A 选项正确.

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ 存在, C 选项正确.

同理, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + f(-x)) = 2f(0) = 0$, B 选项正确.

对于 D 选项, 考虑 $f(x) = |x|$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) - (-x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x}{x} = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0$ 存在, 但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

5. Solution. B.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e+t)}{t} = 0$, 所以曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$ 没有竖直渐近线.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right) - x \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e+t) - 1}{t} = \frac{1}{e}$,

所以曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$ 有斜渐近线 $y = x + \frac{1}{e}$.

故曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$ 的渐近线条数为 1.

6. Solution. A.

因被积函数 $e^{\sin t} \sin t$ 是周期为 2π 的函数, 所以 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ 恒为常数.

计算

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt.$$

对第二项作代换 $u = 2\pi - t$, 则 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_{\pi}^0 e^{\sin(2\pi-u)} \sin(2\pi-u)(-du) = -\int_0^{\pi} e^{-\sin u} \sin u du$.

所以

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt.$$

因为在 $(0, \pi)$ 上, $\sin t > 0$, 且 $e^{\sin t} > e^{-\sin t}$, 所以 $\int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt > 0$.

2 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. **Solution.** $y + x - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0.$

当 $t = 1$ 时, $x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $y = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{2(1+t^2)}}{\frac{1}{1+t^2}} = t, \text{ 所以 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1.$$

切线斜率为 1, 故法线斜率为 -1 , 法线方程为 $y - \frac{1}{2} \ln 2 = -1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 即 $y + x - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} = 0.$

8. **Solution.** $(\pi, -2).$

$$y' = \sin x + x \cos x - 2 \sin x, \quad y'' = \cos x + \cos x - x \sin x - 2 \cos x = -x \sin x,$$

在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ 内, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pi.$

当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, \pi)$ 时, $y'' \leq 0$, y'' 在 $x = 0$ 两侧不变号, 故 $x = 0$ 不是拐点;

当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时, $y'' > 0$, y'' 在 $x = \pi$ 两侧变号.

故曲线的拐点为 $(\pi, -2).$

9. **Solution.** $\frac{1}{2} \ln 3.$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, \text{ 所以 } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \sec x dx,$$

$$\text{故 } s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \ln 3.$$

10. **Solution.** $\frac{(\ln 2)^n}{n!}.$

$$y = 2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}, \text{ 所以 } x^n \text{ 项的系数为 } \frac{(\ln 2)^n}{n!}.$$

3 计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. **Solution.** 由题可知 $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + x - 3) = a + 1 - 3 = 0$, 所以 $a = 2.$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} = 5.$$

12. **Solution.** 记 $\int_0^1 f(x) dx = C.$

令 $x = 2$, 得 $f(2) = 4 - 2f(2) + 2C$, 所以 $f(2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}C.$

方程 $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx$ 两边从 0 积分到 1 得

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 (x^2 - x \cdot f(2) + 2C) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}f(2) + 2C = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}C \right) + 2C \\ &= \frac{5}{3}C - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

解得 $C = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = x^2 - x \cdot f(2) + 2 \int_0^1 f(x) dx = x^2 - \frac{5}{3}x + 1$.

13. **Solution.** 由定积分的定义,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

14. **Solution.** 令 $x = \sin \theta$, 则 $dx = \cos \theta d\theta$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta (1-\sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

15. **Solution.**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x d e^{-\lambda x} \\ &= - x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

16. **Solution.** 方程变形为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(C + \int e^x dx \right) = \frac{1}{x} (C + e^x). \end{aligned}$$

将初始条件 $y(2) = 1$ 代入上式得 $C = 2 - e^2$, 所以特解为 $y = \frac{1}{x} (2 - e^2 + e^x)$.

4 综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. **Solution.** 由于 $f(x)$ 连续, 所以其积分变上限函数 $\int_0^x f(t)dt$ 可导,

从而方程 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t)dt$ 两边可导. 两边求导得 $f'(x) - 2f(x) = 2(x+1)$.

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-2)dx} \left(C + \int 2(x+1)e^{\int(-2)dx} dx \right) \\ &= e^{2x} \left(C + 2 \int (x+1)e^{-2x} dx \right) = e^{2x} \left[C + 2 \int xe^{-2x} dx + 2 \int e^{-2x} dx \right] \\ &= e^{2x} \left[C + 2 \int xe^{-2x} dx - e^{-2x} \right] = e^{2x} \left[C - \int xde^{-2x} - e^{-2x} \right] \\ &= e^{2x} \left[C - xe^{-2x} + \int e^{-2x} dx - e^{-2x} \right] = e^{2x} \left[C - xe^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} \right] \\ &= Ce^{2x} - x - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

方程 $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t)dt$ 两边令 $x=0$ 得 $f(0)=1$, 所以 $C = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - x - \frac{3}{2}$.

当 $n \geq 2$ 时, $f^{(n)}(0) = \left(\frac{5}{2}e^{2x} \right)^{(n)} \Big|_{x=0} = 5 \cdot 2^{n-1}e^{2x} \Big|_{x=0} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

18. **Solution.** 由抛物线过原点得 $c=0$, 且有

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2},$$

即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$. 旋转体的体积 $V =$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi f^2(x) dx &= \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(ax+b)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2) dx = \pi \left[\frac{a^2}{5}x^5 + \frac{ab}{2}x^4 + \frac{b^2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} \right) = \pi \left[\frac{a^2}{5} + \frac{a(1-a)}{3} + \frac{4(1-a)^2}{27} \right]. \end{aligned}$$

由 $\frac{dV}{da} = \pi \left[\frac{2}{5}a + \frac{1-2a}{3} - \frac{8(1-a)}{27} \right] = 0$ 解得 $a = -\frac{5}{4}$, 又 $\frac{d^2V}{da^2} \Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \right) = \frac{4\pi}{135} > 0$,

所以当 $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{2}$, $c=0$ 时, 旋转体体积 V 最小.

5 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. **Proof.** 令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 2021$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, $f(x)$ 具有唯一驻点 $x=e$,

且 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

因 $f(0^+) = -\infty < 0$, $f(e) = 2021 > 0$, $f(+\infty) = -\infty < 0$,

由介值定理和 $f(x)$ 的单调性易知方程 $\ln x = \frac{x}{e} - 2021$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内只有两个不同的实根.

20. **Solution.** 由 Taylor 公式, 将 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处展开得

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 = f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2,$$

其中 ξ 介于 1 和 x 之间. 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x) dx \right| &= \left| \int_0^2 \left[f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 \right] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^2 |f''(\xi)|(x-1)^2 dx \\ &\leq \frac{M}{2} \int_0^2 (x-1)^2 dx = \frac{M}{3}. \end{aligned}$$