CHAPTER 1

2023-2024 学年微积分（一）（上）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 下列函数在其定义域内无界的是【 】.

   A. $x^2D(x)$（$D(x)$ 为 Dirichlet 函数） **B.** $\tan(\sin x)$

   C. $\dfrac{\sin x}{x}$ **D.** 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$

2. 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ 的斜渐近线为【 】.

   A. $y = -x$ **B.** $y = -x + 1$ **C.** $y = x$ **D.** $y = x + 1$

3. 通解为 $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^x + x$（其中 C_1, C_2 为任意常数）的微分方程为【 】.

   A. $y'' - y' = 1$ **B.** $y'' - y = 0$

   C. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$ **D.** $y'' - 2y' + y = x - 2$

4. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义，则下列命题

   (a) 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

   (b) 若 $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

   (c) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x), \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

   其中正确的个数是【 】.

   A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

5. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(f(x+1) + \mathrm{e}^{x^2}\right)}{x^2} = 2$，则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的【 】.

   A. 驻点且为极大值点 **B.** 驻点且为极小值点

   C. 不可导点 **D.** 可导点但不是驻点

6. 设 $M = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x \mathrm{d}x$，$N = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x + \sin^3 x\right) \mathrm{d}x$，$P = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x\cos x - \sin^2 x\right) \mathrm{d}x$，则【 】.

   A. $M > N > P$ **B.** $N > P > M$ **C.** $N > M > P$ **D.** $M > P > N$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x+1$ 在点 $(2,3)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(2-\dfrac{1}{n}\right)-3\right]=$ ____________.

8. $y=f(x)$ 满足 $y'=(1-y)y^{\alpha}(\alpha>0)$，若曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点为 $\left(t,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\alpha=$ ____________.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x}，则 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xf(2x)\mathrm{d}x=$ ________________.

10. 位于曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}(0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界图形的面积为 ________________.

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{y}+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$.

12. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\ln(1+x)-x\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)$，当 $x\to 0$ 时，求 $f(x)$ 的主部及阶数.

13. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x\sin x^2}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t$.

14. 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]$.

15. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{1-t}\mathrm{d}t$，求 $I=\displaystyle\int_0^1(x-1)f(x)\mathrm{d}x$.

16. 若曲线 $y=f(x)$ 是 $y''+2y'-3y=4\mathrm{e}^x$ 的一条积分曲线，此曲线过点 $A(0,1)$，且在点 $A(0,1)$ 处的切线的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，求 $f(x)$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，其反函数存在为 $g(x)$，若 $\displaystyle\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$，求 $f(x)$.

18. 设函数 $f(x)=ax+\frac{3}{2}bx^2$ 在区间 $(0,1)$ 内恒大于 0，其中 a,b 为未知常数. 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围成的区域 D 的面积为 2. 求 a,b 的值，使得 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小，并求出此最小值.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续且单调增加，其中 $a>0$. 证明

$$a\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^a f(x)\mathrm{d}x \int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$(b-a)^2|f''(\xi)| \geq 4|f(b)-f(a)|.$$

CHAPTER 2

2023-2024 学年微积分（一）（上）期末考试参考答案

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. A.

   $x^2D(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$，显然 $x^2D(x)$ 在其定义域内无界.

   $\forall x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\le 1$，所以 $|\tan(\sin x)|\le\tan 1=\dfrac{\pi}{4}$，故 $\tan(\sin x)$ 在其定义域内有界.

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，所以 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在其定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内有界.

   $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$，显然 $\operatorname{sgn}(x)$ 在其定义域内有界.

2. **Solution**. C.

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=1$，

   $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)=0$，

   所以斜渐近线方程为 $y=x$.

3. **Solution**. D.

   由通解结构可以看出 $(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$ 是一个齐次方程的通解，$y^*=x$ 是一个相应非齐次方程的特解.

   通解 $(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$ 对应齐次方程的二重特征根 $r=1$，所以齐次方程为 $y''-2y'+y=0$.

   将特解 $y^*=x$ 代入非齐次方程验证可得 D 选项 $y''-2y'+y=x-2$ 满足题意.

4. **Solution**. B.

   若 $f'(x_0)$ 存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

   同理，若 $f'_-(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续；若 $f'_+(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处右连续，

   所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x+1, & x<0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，

但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

所以有两个命题正确.

5. **Solution**. B.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(f(x+1)+\mathrm{e}^{x^2}\right)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)+\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=2,\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}=1$. 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性易知 $f(1)=0$.

又由极限的保号性，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{f(x+1)}{x^2}>0$，所以 $f(x+1)>0$. 即 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}\cdot x=0$，所以 $f'(1)=0$，即 $x=1$ 是 $f(x)$ 的驻点.

6. **Solution**. C.

$y=\cos^4\sin^3 x$ 是奇函数，所以 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^3 x\mathrm{d}x=0$.

$N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x>0$.

$P=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x\cos x-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x<0$.

所以 $N>M>P$.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. -3.

由题可知 $f(2)=3$，$f'(2)=(2x-1)\Big|_{x=2}=3$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(2-\dfrac{1}{n}\right)-3\right]=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(2-\dfrac{1}{n}\right)-f(2)}{-\dfrac{1}{n}}=-f'(2)=-3$.

8. **Solution**. 1.

方程 $y'=(1-y)y^\alpha$ 两边对 x 求导得

$$y''=-y'y^\alpha+(1-y)\alpha y^{\alpha-1}y'=\left[-y^\alpha+(1-y)\alpha y^{\alpha-1}\right]y'=\left[-y^\alpha+(1-y)\alpha y^{\alpha-1}\right](1-y)y^\alpha.$$

由题意可知 $y(t)=\dfrac{1}{2}$，$y''(t)=0$，代入得 $\left[-\left(\dfrac{1}{2}\right)^\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right]\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha+1}=0$，解得 $\alpha=1$.

9. **Solution**. $\frac{1}{4}$.

由题可知，$f(x)=\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'=-\mathrm{e}^{-x}$，所以

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xf(2x)\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x\cdot\left(-\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{4}\mathrm{e}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

10. **Solution**. 1.

由题可知，所求面积 $A=$

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

3 计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 由方程得当 $x=0$ 时，$y=0$.

方程两边关于 x 求导得

$$\mathrm{e}^y y'+6y+6xy'+2x=0.$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入上式得 $y'(0)=0$.

方程两边关于 x 再次求导得

$$\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''+12y'+6xy''+2=0.$$

将 $x=0$，$y=0$，$y'(0)=0$ 代入上式得 $y''(0)=-2$.

12. **Solution**. 由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}f(x)=\mathrm{e}^x\ln(1+x)-x\left(1+\frac{1}{2}x\right)&=\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-x-\frac{1}{2}x^2\\ &=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-x-\frac{1}{2}x^2\\ &=\frac{1}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的主部为 $\frac{1}{3}x^3$，阶数为 3.

13. **Solution**. 令 $u=x-t$，则 $\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u$.

故

$$\begin{aligned}l=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x\sin x^2}\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u}{x^3}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

14. **Solution**. 由定积分的定义可得

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\
&=\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x\\
&=\ln 2-(x-\ln(1+x))\Big|_0^1=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1.
\end{aligned}
$$

15. **Solution**. 由题可知 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{\sin x}{1-x}$，所以

$$
\begin{aligned}
I=\int_0^1(x-1)f(x)\mathrm{d}x=&\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x-1)^2\\
=&\frac{1}{2}f(x)(x-1)^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)^2f'(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)\mathrm{d}\cos x\\
=&-\frac{1}{2}\left[(x-1)\cos x\Big|_0^1-\int_0^1\cos x\mathrm{d}x\right]\\
=&\frac{\sin 1-1}{2}.
\end{aligned}
$$

16. **Solution**. 齐次方程 $y''+2y'-3y=0$ 的特征方程为 $r^2+2r-3=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=-3$.

对于 $f(x)=4\mathrm{e}^x$，$\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设特解为 $y^*=Ax\mathrm{e}^x$，

代入方程得 $A(x+2)\mathrm{e}^x+2A(x+1)\mathrm{e}^x-3Ax\mathrm{e}^x=4\mathrm{e}^x$，解得 $A=1$，

所以非齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$.

由题可知 $y(0)=1$，$y'(0)=\tan\dfrac{3\pi}{4}=-1$，代入得 $\begin{cases}C_1+C_2=1,\\-3C_1+C_2+1=-1\end{cases}$，解得 $C_1=\dfrac{3}{4}$，$C_2=\dfrac{1}{4}$.

因此 $f(x)=\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$.

4 综合题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 方程 $\displaystyle\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$ 两边关于 x 求导得 $g(f(x))\cdot f'(x)+f(x)=x\mathrm{e}^x$.

由反函数的性质，$g(f(x))=x$，所以上式即 $xf'(x)+f(x)=x\mathrm{e}^x$.

当 $x=0$ 时，由题可知 $f(0)=0$；当 $x\neq 0$ 时，上式可变形为

$$
f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\mathrm{e}^x.
$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得

$$
\begin{aligned}
y=&\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(C+\int\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)\\
=&\frac{1}{x}\left(C+\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{x}\left(C+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right).
\end{aligned}
$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(C+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[\mathrm{e}^x+\frac{C-\mathrm{e}^x}{x}\right]=f(0)=0$，解得 $C=1$.

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{x}\left(1+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right), & x\neq0.\end{cases}$

18. **Solution**. 由题可知 $\int_0^1\left(ax+\frac{3}{2}bx^2\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=2$，所以 $a=4-b$.

旋转体的体积 $V=$

$$\begin{aligned}\int_0^1\pi f^2(x)\mathrm{d}x=&\pi\int_0^1\left[(4-b)x+\frac{3}{2}bx^2\right]^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left[\frac{9}{4}b^2x^4+3(4-b)bx^3+(4-b)^2x^2\right]\mathrm{d}x\\=&\pi\left[\frac{9}{20}b^2+\frac{3}{4}(4-b)b+\frac{1}{3}(4-b)^2\right]=\left(\frac{1}{30}b^2+\frac{1}{3}b+\frac{16}{3}\right)\pi.\end{aligned}$$

$V'=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}b\right)\pi$，令 $V'=0$ 解得 $b=-5$，此时 $V''(-5)=\frac{\pi}{15}>0$，所以 V 的最小值存在，$V(-5)=\frac{9}{2}\pi$.

故当 $a=9$，$b=-5$ 时，D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积最小，此最小值为 $\frac{9}{2}\pi$.

5 证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 令 $F(x)=x\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0$.

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t+xf(x)g(x)-f(x)\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-g(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\left[f(t)g(t)+f(x)g(x)-f(x)g(t)-g(x)f(t)\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\left[f(x)-f(t)\right]\cdot\left[g(x)-g(t)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由题可知 $f(x),g(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调增加，所以 $\forall\, t\in[0,x]$，$f(x)-f(t)\geq0$，$g(x)-g(t)\geq0$，

故 $[f(x)-f(t)]\cdot[g(x)-g(t)]\geq0$，因此 $F'(x)\geq0$，$F(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调增加.

所以 $F(x)\geq F(0)=0$，即

$$a\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

20. **Proof**. 由 Taylor 公式，将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在 $x=a$ 和 $x=b$ 处展开得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2,$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2.$$

因 $f'(a)=f'(b)=0$，所以上式即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{8}f''(\xi_1)(b-a)^2,$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{8}f''(\xi_2)(b-a)^2,$$

其中 $\xi_1 \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2 \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$.

两式相减得

$$0 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) - f(b) + \frac{1}{8}\left[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right](b-a)^2,$$

所以

$$|f(b) - f(a)| = \frac{(b-a)^2}{8}\left|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right| \le \frac{(b-a)^2}{8}\left(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|\right).$$

取 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$，

则 $|f(b) - f(a)| \le \dfrac{(b-a)^2}{8} \cdot 2|f''(\xi)|$，即 $(b-a)^2|f''(\xi)| \ge 4|f(b) - f(a)|$.