

---

---

# CHAPTER 1

---

## 2016-2017 学年微积分（一）（下）期中考试

### 1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 已知微分方程  $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ ,  $f(x) \neq 0$  有三个解  $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{3x}$ , 求此微分方程满足初始条件  $y(0) = 2, y'(0) = 3$  的特解.

2. 设  $y = y(x)$  在区间  $|x| < \frac{\pi}{2}$  满足微分方程  $y'' - (y')^2 = 1$ ,  $y|_{x=0} = 0$ ,  $y'|_{x=0} = 0$ , 求特解.

3. 求过点  $M(2, -2, 3)$  与直线  $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{0}$  垂直相交的直线  $L$  的方程.

4. 设曲线  $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$ , 求其在点  $(1, 1, 1)$  处的切线方程和法平面方程.

5. 设  $z = f(xe^y)$ , 其中  $f$  有一阶导数,  $f'(0) = 2$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1)$ .

6. 设函数  $f(u, v, w)$  有二阶连续偏导数,  $z = f(x, x + y, xy)$ , 求混合偏导函数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

7. 计算  $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2} dx$ .

8. 计算二重积分

$$I = \iint_D (x^3 \sin y + (x+y)^2) \, dx dy,$$

其中  $D: x^2 + y^2 \leq 2y$ .

9. 计算三重积分  $I = \iiint_V xy^2 z^3 \, dx dy dz$ , 其中  $V$  位于第一卦限, 由曲面  $z=0, z=xy, y=x, y=1$  围成.

10. 计算三重积分  $I = \iiint_V (x+z) \, dv$ , 其中  $V: \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$ .

## 2 综合计算题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设方程组  $\begin{cases} F(x+y, y-z) = 0, \\ z = f(xy) \end{cases}$ , 其中  $F, f$  具有连续的一阶偏导, 且  $F_1 - yf'F_2 \neq 0$ , 求  $\frac{dz}{dy}$ .

12. 在椭球面  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$  上求一点, 使函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  在该点处沿方向  $\boldsymbol{n} = (1, -2, 3)$  的方向导数最大.

13. 设函数  $f(x)$  满足  $f'(x) + 3f(x) + 2x \int_0^1 f(xt)dt = e^{-x}$ , 且  $f(0) = 1$ , 求  $f(x)$ .

14. 计算  $I = \iint_D |x + y - 1| dx dy$ , 其中  $D$  是圆域  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

15. 设  $f(x, y) = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2}$ , 讨论  $f(x, y)$  在原点  $(0, 0)$  处的:

(1) 连续性;

(2) 偏导数存在性;

(3) 可微性;

(4) 沿方向  $\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  的方向导数的存在性, 对存在情形计算出结果.

---

## CHAPTER 2

---

### 2016-2017 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

#### 1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 因  $e^x - x, e^{3x} - x$  是齐次方程  $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$  的两个线性无关解, 所以原微分方程的通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{3x} - x) + x.$$

将  $y(0) = 2, y'(0) = 3$  代入上式, 得  $C_1 = C_2 = 1$ , 故所求特解为

$$y = e^x + e^{3x} - x.$$

2. **Solution.** 令  $p(x) = y'$ , 则原方程化为  $p' = p^2 + 1, p|_{x=0} = 0$ .

分离变量得

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx.$$

积分得  $\arctan p = x + C$ , 由初始条件得  $C = 0$ , 所以  $p = y'(x) = \tan x$ . 再积分, 并代入  $y|_{x=0} = 0$ , 得

$$y(x) = -\ln(\cos x), \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

3. **Solution.** 过点  $M(2, -2, 3)$  且与直线  $L_1$  垂直的平面方程为

$$(x - 2) + 2(y + 2) = 0.$$

将  $L_1$  的参数方程  $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = 4$  代入平面方程, 得  $t = -1$ , 从而交点为  $P(-2, 0, 4)$ .

所求直线为过点  $M$  和点  $P$  的直线, 故其方程为

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{-1}.$$

4. **Solution.** 令

$$F(x, y, z) = x + y - z - 1, \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$

则

$$\nabla F = (1, 1, -1), \quad \nabla G(1, 1, 1) = 2(1, 1, 1).$$

切线方向向量可取

$$\mathbf{s} = (1, 1, -1) \times (1, 1, 1) = 2(1, -1, 0).$$

所以切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{0},$$

法平面方程为

$$x - y = 0.$$

5. **Solution.** 因

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y f'(xe^y),$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, y) = e^y f'(0) = 2e^y.$$

由偏导定义可知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1) = \left. \frac{d}{dy} (2e^y) \right|_{y=1} = 2e.$$

6. **Solution.** 记  $f_i, f_{ij}$  分别为  $f(u, v, w)$  关于第  $i$  个变量的一阶偏导和二阶偏导.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_2 + yf_3,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{12} + xf_{13} + f_{22} + xf_{23} + f_3 + yf_{32} + xyf_{33} \\ &= f_{12} + xf_{13} + f_{22} + (x+y)f_{23} + f_3 + xyf_{33}. \end{aligned}$$

7. **Solution.** 交换积分次序, 得

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx \int_{x^3}^x dy = \int_0^1 e^{x^2} (x - x^3) dx.$$

令  $t = x^2$ , 则

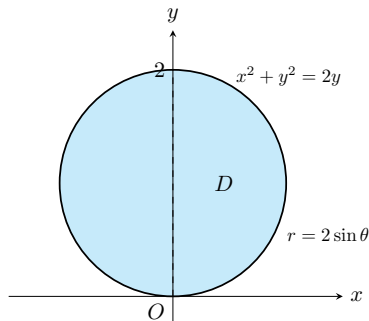
$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt = \frac{e-2}{2}.$$

8. **Solution.**

由于  $D$  关于  $y$  轴对称,  $\iint_D x^3 \sin y \, dx dy = 0$ ,  $\iint_D 2xy \, dx dy = 0$ .

因此利用极坐标代换得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cdot r dr \\ &= 4 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



9. **Solution.** 记  $D$  为  $V$  在  $xOy$  面上的投影, 则  $D$  由直线  $x=0, y=x, y=1$  围成. 因此

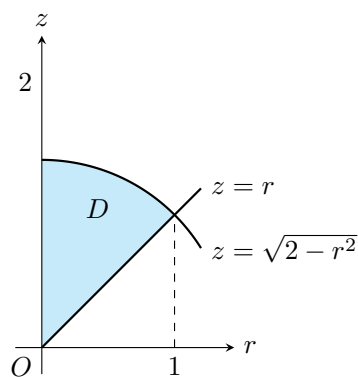
$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz \\ &= \frac{1}{4} \iint_D x^5 y^6 dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_x^1 x^5 y^6 dy \\ &= \frac{1}{28} \int_0^1 (x^5 - x^{12}) dx = \frac{1}{28} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{13} \right) = \frac{1}{312}. \end{aligned}$$

10. **Solution.**

由对称性可得  $\iiint_V x dv = 0$ .

用柱坐标代换, 得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z dz \\ &= \pi \int_0^1 (2 - 2r^2) r dr = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



## 2 综合计算题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** 视  $x, z$  为因变量, 方程组两边对  $y$  求导, 得

$$\begin{cases} F_1 \left( \frac{dx}{dy} + 1 \right) + F_2 \left( 1 - \frac{dz}{dy} \right) = 0, \\ \frac{dz}{dy} = f' \left( x + y \frac{dx}{dy} \right). \end{cases}$$

于是

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f' [(x-y)F_1 - yF_2]}{F_1 - yf'F_2}.$$

12. **Solution.** 设所求点为  $M(x, y, z)$ , 则  $\nabla f(M) = (2x, 2y, -1)$ , 且  $\mathbf{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3)$ .

函数  $f(x, y, z)$  在点  $M$  处沿方向  $\mathbf{n}$  的方向导数为

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2x - 4y - 3).$$

即在约束  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$  下求  $2x - 4y - 3$  的最大值. 构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x - 4y - 3 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -4 + 4\lambda y = 0, \\ L_z = 4\lambda z = 0, \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

得  $x = -y, z = 0$ . 代入约束方程, 得

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad z = 0.$$

比较方向导数的值, 可知所求点为

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right).$$

13. **Solution.** 令  $u = tx$ , 则

$$x \int_0^1 f(tx) dt = \int_0^x f(u) du.$$

从而原方程变为

$$f'(x) + 3f(x) + 2 \int_0^x f(u) du = e^{-x}.$$

由上式可知  $f''(x)$  存在, 两边求导得

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = -e^{-x}. \quad (*)$$

特征方程  $r^2 + 3r + 2 = 0$  有相异实根  $r = -2, -1$ , 对应齐次方程通解为

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

设特解为  $y^* = A x e^{-x}$ , 代入方程 (\*) 得  $A = -1$ , 所以

$$f(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - x e^{-x}.$$

由原方程可得  $f'(0) = -2$ , 又  $f(0) = 1$ , 代入得  $C_1 = 0, C_2 = 1$ . 因此

$$f(x) = (1 - x) e^{-x}.$$

14. **Solution.**



用  $x + y = 1$  将区域  $D$  分为

$D_1 = D \cap \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$  和  $D_2 = D \setminus D_1$ .

记  $g = x + y - 1$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} g d\sigma - \iint_{D_2} g d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_1} g d\sigma - \iint_D g d\sigma. \end{aligned}$$

因为

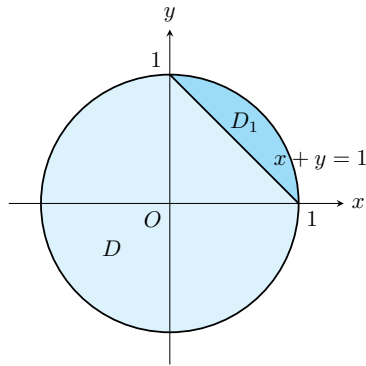
$$\iint_D g d\sigma = \iint_D (-1) dx dy = -\pi,$$

且

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} g d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x + y - 1) dy \\ &= \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

所以

$$I = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$$



#### 15. Solution.

(1) 由于  $f(x, y) = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2}$  是初等函数, 且在全平面有定义, 所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续.

(2) 因为  $f(x, 0) = 0$ , 所以  $f_x(0, 0) = 0$ ; 同理  $f_y(0, 0) = 0$ .

(3) 考虑极限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

考虑  $y = x$ ,  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$  不存在, 所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不可微.

(4) 利用方向导数的定义, 得

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)}{\rho} = \sqrt[3]{\cos \alpha} \sqrt[3]{\sin^2 \alpha}.$$