
CHAPTER 1

2017-2018 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 设直线 l 过点 $M_0(1, 2, 0)$, 且平行于平面 $\pi: x - 2y + z - 4 = 0$, 又与直线 $l_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 相交, 求此直线的方程.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切向量、法平面方程.

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} \quad (a > 0)$ 分别在 xOy 面和 zOx 面上的投影曲线的方程.

4. 已知 $z(x, y) = \int_0^1 e^{t^2} |x + y^2 - t| dt$, 其中 $0 < x + y^2 < 1$, 求 z_{xy} .

5. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 满足方程 $F(x + z, xy) = 0$, 且 $f(x, y)$, $F(s, t)$ 均具有连续的一阶偏导数, $f_2 F_1 + y f_2 F_2 - x f_1 F_2 \neq 0$, 求 $\frac{dx}{dz}$.

6. 求 $I = \int_0^1 dy \int_y^1 x^2 \cos(xy) dx$.

7. 求 $I = \iint_D (2x + 3y - 1)^2 dx dy$, 其中 $D : |x| + |y| \leq 1$.

8. 设 $f(x, y)$ 连续, $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, D 是由 $y = 0, y = x^2$ 和 $x = 1$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$.

9. 求 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z = 8$ 所围成的区域.

10. 求 $I = \iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}v$, 其中 $\Omega : 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, a > 0$.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设函数 $u = f(x \sin y)$, 其中 $f(t)$ 具有连续的二阶导数, 且 $f'(0) = 5$, 向量 $\boldsymbol{n} = (3, 4)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}, \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{n} \partial x} \Big|_{(0,0)}$.

12. 在平面曲线 $x^2 + 2y^2 - 2x = 88$ 上求一点，使函数 $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ 在该点处沿方向 $\mathbf{n} = (3, 4)$ 的方向导数最大.

13. 求由抛物线 $y^2 = ax$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$ 所围的包含一段 x 轴的区域 D 的面积 S .

14. 求 $I = \iint_D |x^2 + y^2 - 1| dx dy$, 其中 D 是矩形区域: $|x| \leq 2, |y| \leq 2$.

15. 设二元函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处存在二阶偏导数 $f_{xx}(0, 0)$ 和 $f_{yy}(0, 0)$. 判断下列的结论是否正确, 如果正确, 请给出理由; 如果不正确, 请给出反例:

- (1) $f_x(x, 0)$ 在原点 $(0, 0)$ 处关于 x 连续;
- (2) 二元函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处连续.

CHAPTER 2

2017-2018 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 设 l 与 l_1 的交点为 Q , 并设 $Q(2+t, 1+2t, 2+t)$.

因此直线 l 的方向向量可取

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{M_0Q} = (t+1, 2t-1, t+2).$$

又 l 平行于平面 π , 所以 \mathbf{s} 与 π 的法向量 $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$ 垂直, 即

$$(t+1) - 2(2t-1) + (t+2) = 0.$$

解得 $t = \frac{5}{2}$, 故 $\mathbf{s} = \left(\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}\right)$. 所以所求直线方程为

$$\frac{x-1}{\frac{7}{2}} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{\frac{9}{2}}.$$

2. **Solution.** 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6, \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

则

$$\nabla F(1, 1, 2) = 2(1, 1, 2), \quad \nabla G(1, 1, 2) = (2, 2, -1).$$

曲线在点 $(1, 1, 2)$ 处的切向量

$$\boldsymbol{\tau} = (1, 1, 2) \times (2, 2, -1) = -5(1, -1, 0).$$

因此切向量可取 $(1, -1, 0)$, 法平面方程为

$$x - y = 0.$$

3. **Solution.** 该空间曲线在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax, \\ z = 0. \end{cases}$$

因为 $x^2 + y^2 = ax$, 由 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 得 $z^2 = a^2 - ax$, 所以该空间曲线在 zOx 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} z^2 = a^2 - ax, \\ y = 0, \end{cases} \quad (-a \leq z \leq a).$$

4. **Solution.** 记 $s = x + y^2$, 由 $0 < s < 1$ 可得

$$z = \int_0^s e^{t^2}(s-t)dt + \int_s^1 e^{t^2}(t-s)dt.$$

因此

$$z_x = \int_0^s e^{t^2} dt - \int_s^1 e^{t^2} dt.$$

对 y 求偏导, 得

$$z_{xy} = 2e^{s^2} \frac{\partial s}{\partial y} = 4ye^{(x+y^2)^2}.$$

5. **Solution.** 由题设知方程组

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ F(x + z, xy) = 0 \end{cases}$$

确定隐函数 $x = x(z)$, $y = y(z)$.

方程组两边对 z 求导, 得

$$\begin{cases} 1 = f_1 \frac{dx}{dz} + f_2 \frac{dy}{dz}, \\ F_1 \left(1 + \frac{dx}{dz}\right) + F_2 \left(y \frac{dx}{dz} + x \frac{dy}{dz}\right) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{x F_2 + f_2 F_1}{f_2 F_1 + y f_2 F_2 - x f_1 F_2}.$$

6. **Solution.** 交换积分次序, 得

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 \cos(xy) dy.$$

所以

$$I = \int_0^1 x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).$$

7. **Solution.**

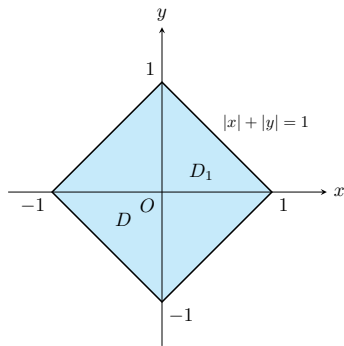
利用奇偶对称性及轮换对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (4x^2 + 9y^2 + 1) dx dy \\ &= 13 \iint_D x^2 dx dy + \iint_D dx dy. \end{aligned}$$

记 D_1 为 D 在第一象限的部分, 则 $D_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$,

且 $\iint_D dx dy = 2$. 因此

$$I = 52 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy + 2 = 52 \int_0^1 x^2(1-x) dx + 2 = \frac{19}{3}.$$



8. Solution.

设

$$A = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

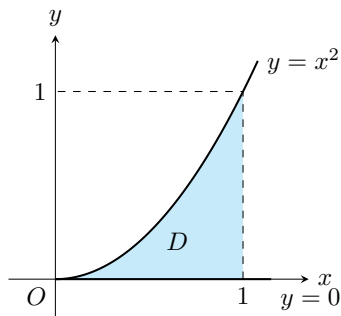
则 $f(x, y) = xy + A$.

于是

$$\begin{aligned} A &= \iint_D xy dx dy + \iint_D A dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy + A \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \\ &= \frac{1}{12} + \frac{A}{3}. \end{aligned}$$

解得 $A = \frac{1}{8}$, 故

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{8}.$$



9. Solution. 旋转曲面方程为

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

记 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leq 16$. 用柱坐标代换, 得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 r dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^8 r^2 dz \\ &= 2\pi \int_0^4 r^3 \left(8 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{1024\pi}{3}. \end{aligned}$$

10. Solution. 由题设可知 Ω 为上半球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$. 先对 z 积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a z^2 dz \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2 - z^2} dx dy \\ &= \pi \int_0^a z^2 (a^2 - z^2) dz = \frac{2\pi a^5}{15}. \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. Solution. 因为 $\mathbf{n} = (3, 4)$, 所以其单位方向向量为 $\mathbf{n}^\circ = \frac{1}{5}(3, 4)$.

又

$$u_x = f'(x \sin y) \sin y, \quad u_y = f'(x \sin y) x \cos y,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{f'(x \sin y)}{5} (3 \sin y + 4x \cos y).$$

利用偏导数定义, 得

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n} \partial x} \right|_{(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{5} f'(0)x}{x} = 4.$$

12. **Solution.** 设所求点为 $M(x, y)$, 则 $\nabla f(x, y) = (6x, 2y)$, 且 $\mathbf{n}^\circ = \frac{1}{5}(3, 4)$.

函数 $f(x, y)$ 在点 $M(x, y)$ 沿方向 \mathbf{n} 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \frac{1}{5}(18x + 8y) = \frac{2}{5}(9x + 4y).$$

因此在约束 $x^2 + 2y^2 - 2x = 88$ 下求 $9x + 4y$ 的最大值. 构造 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = 9x + 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 2x - 88).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 9 + 2\lambda x - 2\lambda = 0, \\ L_y = 4 + 4\lambda y = 0, \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 - 2x - 88 = 0. \end{cases}$$

由前两个方程可得 $2(x - 1) = 9y$, 代入约束方程得两个受检点

$$M_1(10, 2), \quad M_2(-8, -2).$$

比较方向导数的值, 得 $M_1(10, 2)$ 为所求点.

13. **Solution.**

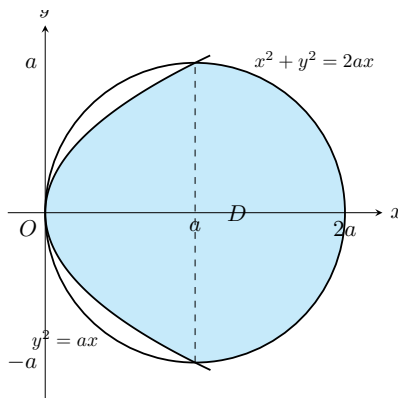
区域 D 由抛物线 $y^2 = ax$ 和圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 围成, 联立

$$\begin{cases} y^2 = ax, \\ y^2 = 2ax - x^2 \end{cases}$$

得交点 $(0, 0), (a, a), (a, -a)$.

所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\pi a^2 + 2 \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{a}}^a dx \\ &= \frac{1}{2}\pi a^2 + 2 \int_0^a \left(a - \frac{y^2}{a}\right) dy = \frac{1}{2}\pi a^2 + \frac{4}{3}a^2. \end{aligned}$$



14. **Solution.**

记 $D_1: x^2 + y^2 \leq 1$, $D_2 = D \setminus D_1$, 并设 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

则

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{D_1} g(x, y) dx dy + \iint_{D_2} g(x, y) dx dy \\ &= \iint_D g(x, y) dx dy - 2 \iint_{D_1} g(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

而

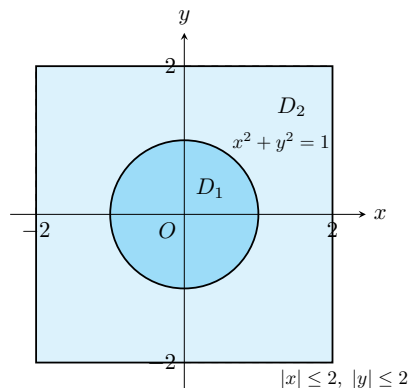
$$\iint_D g(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (x^2 + y^2 - 1) dy dx = \frac{80}{3},$$

且

$$\iint_{D_1} g(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr = -\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$I = \frac{80}{3} + \pi.$$



15. Solution.

(1) 正确. 因为根据偏导数定义,

$$f_{xx}(0, 0) = \left. \frac{df_x(x, 0)}{dx} \right|_{x=0},$$

而一元函数可导必连续, 所以 $f_x(x, 0)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 不正确. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0. \end{cases}$$

该函数在原点 $(0, 0)$ 处不连续. 但是因为 $f(x, 0) = 0$, 所以 $f_x(x, 0) = 0$, 进而 $f_{xx}(0, 0) = 0$;

类似可得 $f_{yy}(0, 0) = 0$. 因此即使 $f_{xx}(0, 0)$ 和 $f_{yy}(0, 0)$ 存在, $f(x, y)$ 也未必在原点连续.