CHAPTER 1

2021-2022 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 求微分方程 $y'' + 9y = x\cos 3x$ 对应齐次方程的通解，并写出非齐次特解的待定特解形式.

2. 设二阶线性微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ 有三个特解 $y_1 = x$，$y_2 = x + 2\mathrm{e}^x$，$y_3 = x + (2+3x)\mathrm{e}^x$，求其通解.

3. 已知两直线 $L_1 : \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 2x - 4y + z = -1 \end{cases}$ 和 $L_2 : x = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$，求 L_1 与 L_2 之间的距离 d.

4. 设由方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 可以确定隐函数 $z=z(x,y)$，F 具有连续的偏导数，且 $F_2'-F_3'\neq 0$，求 $\mathrm{d}z$.

5. 求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$ 在点 $P\left(1,1,\sqrt{2}\right)$ 处的法平面方程.

6. 求椭圆曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x+y+z=4\end{cases}$ 上距离原点最近的点.

7. 计算 $I=\iint\limits_D \left(x^2y^2+x\sin\left(x^2+y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\leq 1\}$.

8. 设平面区域 D 由直线 $y=x$，圆弧 $y=1+\sqrt{1-x^2}$ 及 y 轴所围成，计算 $I=\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma$.

9. 求二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

10. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域.

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. 设 z 具有二阶连续偏导数，已知变换 $\begin{cases} u=x-2\sqrt{y}, \\ v=x+2\sqrt{y} \end{cases}$ 将方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为以 u,v 为自变量的方程，求新方程形式.

12. 讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性及可微性.

13. 求常数 a,b,c 的值，使得函数 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处的所有方向导数中，沿 x 轴正向的方向导数最大，且该最大值为 64.

14. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z=1$，$z=2$ 所围成的区域.

15. 已知曲面 $x^2+y^2+z=4$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leq 4z$ 分为两部分，求这两部分的体积比.

CHAPTER 2

2021-2022 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1　基本计算题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. **Solution**. 方程对应的齐次方程为 $y''+9y=0$，其特征方程为 $r^2+9=0$，解得 $r=\pm 3\mathrm{i}$，

   所以齐次方程的通解为 $C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.

   对于 $y=x\cos 3x$，$\lambda=3i$ 是特征方程的单根，

   所以非齐次特解的待定特解形式为 $y^*=x\left[(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x\right]$，

   其中 A,B,C,D 为待定常数.

2. **Solution**. 由题意可知 $y_2-y_1=2\mathrm{e}^x$，$y_3-y_2=3x\mathrm{e}^x$ 是齐次方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 的两个特解，

   将其代入，得 $\begin{cases}2\mathrm{e}^x+2a(x)\mathrm{e}^x+2b(x)\mathrm{e}^x=0,\\ 3(x+2)\mathrm{e}^x+3a(x)(x+1)\mathrm{e}^x+3xb(x)\mathrm{e}^x=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a(x)\equiv -2,\\ b(x)\equiv 1.\end{cases}$

   所以齐次方程为 $y''-2y'+y=0$，对应的特征方程为 $r^2-2r+1=0$，解得二重根 $r=1$，

   因此通解为 $(Ax+B)\mathrm{e}^x$，故原方程的通解为 $y=(Ax+B)\mathrm{e}^x+x$，其中 A,B 为任意常数.

3. **Solution**. 取直线 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,-3,1)\times(2,-4,1)=(1,1,2)$，直线 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(1,3,4)$.

   在方程组 $\begin{cases}x-3y+z=0,\\ 2x-4y+z=-1\end{cases}$ 中令 $y=0$，取 L_1 上的点 $P(-1,0,1)$，取 L_2 上的点 $Q(0,-1,2)$.

   平行六面体 $\overrightarrow{PQ}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2$ 的体积 $V=\left|\overrightarrow{PQ}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\right|=\left\|\begin{matrix}1&1&2\\1&-1&1\\1&3&4\end{matrix}\right\|=2$，

   又 $V=h\cdot|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|$，其中 h 为两直线之间的距离，所以 $h=\dfrac{V}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. **Solution**. 方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 两边全微分，得

   $$F_1'(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+F_2'(\mathrm{d}y-\mathrm{d}z)+F_3'(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)=0,$$

   解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}x+\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}y$.

5. **Solution**. 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$，$G(x,y,z)=(x-1)^2+y^2-1$.

法一. 因 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_P=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 2y & 0\end{vmatrix}\right|_P=-4yz|_{(1,1,\sqrt{2})}=-4\sqrt{2}\neq 0$，

所以方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y=y(x),z=z(x)$.

方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4=0,\\ G(x,y,z)=(x-1)^2+y^2-1=0\end{cases}$ 两边对 x 求导，得 $\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 2(x-1)+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1-x}{y},\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{z}\end{cases}$，所以法平面的法向量可取为 $\sqrt{2}\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_P=\left(\sqrt{2},0,-1\right)$，

法平面的方程为 $\sqrt{2}\cdot(x-1)-0\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-\sqrt{2})=0$，即 $\sqrt{2}x-z=0$.

法二. $\nabla F=(2x,2y,2z)$，$\nabla G=(2(x-1),2y,0)$，

取两个曲面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_F=\dfrac{1}{2}\nabla F|_P=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$，$\boldsymbol{n}_G=\dfrac{1}{2}\nabla G|_P=(0,1,0)$，

所以法平面的法向量可取为 $\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_G=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\left(-\sqrt{2},0,1\right)$，

法平面的方程为 $-\sqrt{2}\cdot(x-1)-0\cdot(y-1)+1\cdot(z-\sqrt{2})=0$，即 $\sqrt{2}x-z=0$.

6. **Solution**. 设 $P(x,y,z)$ 为椭圆曲线上的任意一点，

即在约束条件 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=4\end{cases}$ 下，求距离平方函数 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

用 Lagrange 乘数法，设 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2z-\lambda+\mu=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-z=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=x+y+z-4=0.\end{cases}$$

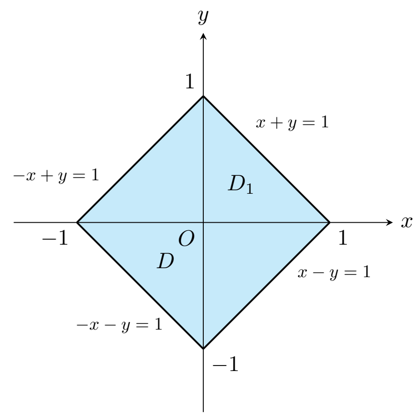
$\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=2(\lambda+1)(x-y)=0$，若 $\lambda=-1$，则 $\dfrac{\partial L}{\partial x}=\mu=0$，

$\dfrac{\partial L}{\partial z}=2z-\lambda+\mu=2z+1=0$，解得 $z=-\dfrac{1}{2}$，方程组 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}=x^2+y^2,\\ x+y=\dfrac{9}{2}\end{cases}$ 无解.

因此 $x=y$，故 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=2x^2-z=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=2x+z-4=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=y=1,\\ z=2.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=y=-2,\\ z=8.\end{cases}$

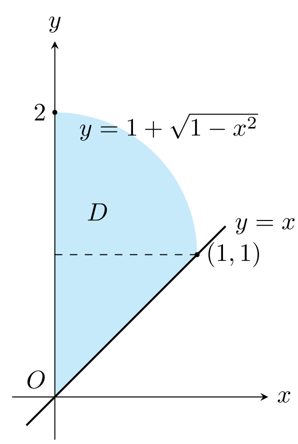
比较可知距离原点最近的点为 $(1,1,2)$.

7. **Solution**.
积分区域如图所示，其中 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.
由于 D 关于 y 轴对称，函数 $y=x\sin\left(x^2+y^2\right)$ 关于 x 是奇函数，
所以 $\iint\limits_D x\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 再由对称性可得



$$
\begin{aligned}
I=&\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&4\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^2\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3\mathrm{d}x\\
=&\frac{4}{3}\int_0^1(1-x)^2x^3\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1\left(x^5-2x^4+x^3\right)\mathrm{d}x\\
=&\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{45}.
\end{aligned}
$$

8. **Solution**.
积分区域如图所示.
用极坐标代换，圆弧 $y=1+\sqrt{1-x^2}$ 对应的极坐标方程为 $r=2\sin\theta$，所以



$$
\begin{aligned}
I=&\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\\
=&\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\mathrm{d}r=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^5\theta\mathrm{d}\theta\\
=&4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{2}{3}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\
=&\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

9. **Solution**. 交换积分次序，

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}(-y^2)\\
&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).
\end{aligned}
$$

10. **Solution**. 用球坐标代换，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 对应的球坐标方程为 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}(z\ge 0)$，所以

$$
\begin{aligned}
I=&\iiint\limits_\Omega\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\rho}\mathrm{d}\rho\\
=&2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\\
=&-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}(\cos\varphi)=\pi\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(\sqrt{2}-1\right).
\end{aligned}
$$

2 综合题 (每小题 8 分，共 40 分)

11. **Solution**. $\begin{cases} u = x - 2\sqrt{y}, \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ 两边全微分，得 $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x - \dfrac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y \end{cases}$,

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\sqrt{y}}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

由链式法则，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =& \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ =& \frac{1}{2y\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{2y\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ =& \frac{1}{2y\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} \\ =& \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) - y\left[\frac{1}{2y\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right] \\ =& \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ =& 4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.\end{aligned}$$

因此 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$.

12. **Solution**. 当 $x\to 0, y\to 0$ 时，$\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le x^2\sqrt{|y|}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2\sqrt{|y|} = 0$，

所以由夹逼定理可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 = f(0,0)$，函数 $f(x,y)$ 在原点处连续.

又 $f(x,0) = f(0,y) \equiv 0$，所以 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，因此函数 $f(x,y)$ 在原点处的偏导数存在.

考察 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

当 $y = x, x\to 0, y\to 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{(2x^2)^2} = \dfrac{1}{4}$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \ne 0$，

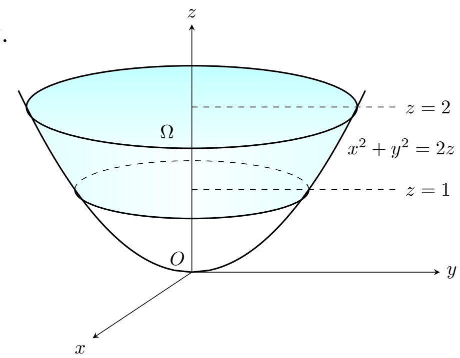
因此函数 $f(x,y)$ 在原点处不可微.

13. **Solution**. $\nabla F|_M = \left(ay^2 + 3cx^2z^2, 2axy + bz, 2cx^3z + by\right)\big|_{(1,2,-1)} = (4a+3c, 4a-b, 2b-2c)$，

由题意可知 $\nabla F|_M//(1,0,0)$，所以 $\begin{cases}4a-b=0,\\2b-2c=0,\\4a+3c=64\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=4,\\b=16,\\c=16.\end{cases}$

14. **Solution**.

由题可知旋转曲面的方程为 $x^2+y^2=2z$，积分区域 Ω 如图所示.
用截面法，

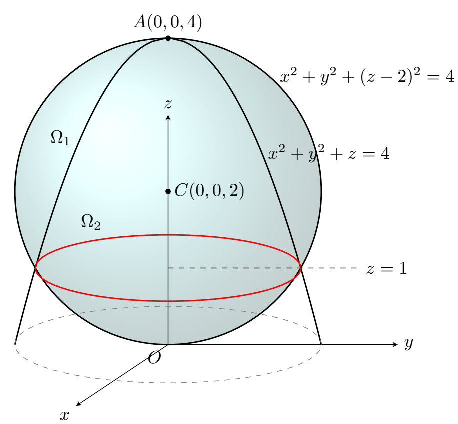


$$\begin{aligned}I=&\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&2\pi\int_1^2 z^2\mathrm{d}z\\=&\frac{2\pi}{3}(8-1)=\frac{14\pi}{3}.\end{aligned}$$

15. **Solution**. 如图所示，联立 $\begin{cases}x^2+y^2+z=4,\\x^2+y^2+z^2=4z\end{cases}$ 得 $4-z+z^2=4z$，

解得 $z=1$ 或 $z=4$，因此抛物面和球面的交线为 $x^2+y^2=3$.

抛物面 $x^2+y^2+z=4$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\le 4z$ 分为 Ω_1 和 Ω_2 两部分.
用截面法，



$$\begin{aligned}V_2=&\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 4z-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\pi\int_0^1\left(4z-z^2\right)\mathrm{d}z+\pi\int_1^4(4-z)\,\mathrm{d}z\\=&\pi\left[\left(2z^2-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(4z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^4\right]\\=&\pi\left[\left(2-\frac{1}{3}\right)+\left(16-8-4+\frac{1}{2}\right)\right]\\=&\pi\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)=\frac{37\pi}{6}.\end{aligned}$$

故 $V_1=\frac{4\pi}{3}\cdot 2^3-V_2=\frac{32\pi}{3}-\frac{37\pi}{6}=\frac{27\pi}{6}$，所以体积比 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{27}{37}$.