
CHAPTER 1

2023-2024 学年微积分（一）（下）期中考试

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 已知 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$, 且 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 4$, 求 $|\mathbf{b} + \mathbf{a}|$.

2. 已知单位向量 \vec{OA} 与 x 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 与 y 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且在 z 轴上的坐标是负的. $\vec{OB} = (1, -\sqrt{2}, -1)$, 求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

3. 求圆锥面 $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ 与旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 $P(1, 1, 2)$ 处的切线与法平面方程.

4. 设 $u = f(x, y, z)$ 具有连续的偏导数, $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 确定的隐函数, 其中 $5z^2 - 4xz + 3y \neq 0$, 又 $f'_1(0, 0, 1) = 2$, $f'_2(0, 0, 1) = 4$, $f'_3(0, 0, 1) = 1$, 求 $\mathrm{d}u|_{(0,0)}$.

5. 设 $z = yf(x^2 - y^2)$, 其中 f 可导, 求 $\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y$.

6. 求积分 $I = \int_1^3 \mathrm{d}x \int_{x-1}^2 \sin y^2 \mathrm{d}y$.

7. 设平面区域 $D = \{(x, y) | -2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 求二重积分 $I = \iint_D (y \cos x + \sqrt{x^2 + y^2}) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

8. 设有直线 $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$, 平面 $\pi: x - 4y - 8z + 12 = 0$, 求直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程.

9. 将空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 化为参数方程.

10. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} e^{1-z} dx dy dz$, 其中 Ω 是三坐标面与平面 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. 若函数 $u = az^4 - bxz + x^2 + y^2$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l} = (2, 1, 2)$ 的方向导数最大, 求 a, b 的值, 并求出最大方向导数.

12. 已知函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x + y)^2 + 2$, D 是由 $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$ 所围成的平面区域, 求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

13. 设 $z(x, y) = x^y + \int_0^x x e^{-(y+t)^2} dt$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,0)}$.

14. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$ 讨论函数 $f(x, y)$ 在原点处的连续性、偏导数存在性及可微性.

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, b]$ 上连续且单调增加, 其中 $b > 0$, 用二重积分证明:

$$b \int_0^b f(x)g(x)dx \geq \int_0^b f(x)dx \int_0^b g(x)dx$$

CHAPTER 2

2023-2024 学年微积分（一）（下）期中考试参考答案

1 基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. **Solution.** 由题意可得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$.

$$|\mathbf{b} + \mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{b} + \mathbf{a})^2} = \sqrt{|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}.$$

2. **Solution.** 设 α, β, γ 分别为 \overrightarrow{OA} 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的夹角,

则由题意可得 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 所以 $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$,

又 \overrightarrow{OA} 在 z 轴上的坐标是负的, 所以 $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$. 从而 $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \text{ 所以 } \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

即所求的 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. **Solution.** 设 $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

$$\text{法一. 因 } \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P = \begin{vmatrix} 4y & -2z \\ 2y & -1 \end{vmatrix}_P = -4y + 2yz|_P = 4 \neq 0,$$

所以方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 可以唯一确定两个具有连续导数的隐函数 $y = y(x)$, $z = z(x)$.

$$\text{方程组 } \begin{cases} F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, \\ G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases} \quad \text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } \begin{cases} 4x + 4y \frac{dy}{dx} - 2z \frac{dz}{dx} = 0, \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \\ \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}, \text{ 所以切线的方向向量可取为 } \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)_P = (1, -1, 0),$$

$$\text{切线的方程为 } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0},$$

$$\text{法平面的方程为 } 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-2) = 0, \text{ 即 } x-y=0.$$

$$\text{法二. } \nabla F = (4x, 4y, -2z), \nabla G = (2x, 2y, -1),$$

$$\text{取两个曲面的法向量分别为 } \mathbf{n}_F = \frac{1}{4} \nabla F|_P = (1, 1, -1), \mathbf{n}_G = \nabla G|_P = (2, 2, -1),$$

$$\text{所以切线的方向向量可取为 } \mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0),$$

$$\text{切线的方程为 } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0},$$

$$\text{法平面的方程为 } 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-2) = 0, \text{ 即 } x-y=0.$$

4. **Solution.** 方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 两边全微分, 得

$$5z^4 dz - z^4 dx - 4xz^3 dz + z^3 dy + 3yz^2 dz = 0,$$

将 $x=0, y=0, z=1$ 代入上式, 得 $5dz - dx + dy = 0$. 所以

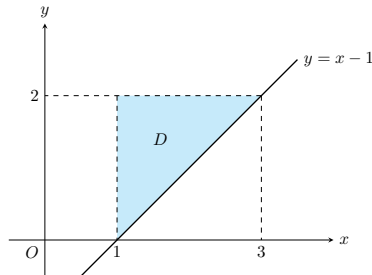
$$\begin{aligned} du|_{(0,0)} &= f'_1 dx + f'_2 dy + f'_3 dz \\ &= 2dx + 4dy + dz \\ &= 2dx + 4dy + \frac{1}{5}(dx - dy) \\ &= \frac{11}{5}dx + \frac{19}{5}dy. \end{aligned}$$

5. **Solution.** $z_x = yf'(x^2 - y^2) \cdot 2x$, $z_y = f(x^2 - y^2) + yf'(x^2 - y^2) \cdot (-2y)$,

$$\text{所以 } \frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = 2yf'(x^2 - y^2) + \frac{f(x^2 - y^2)}{y} - 2yf'(x^2 - y^2) = \frac{f(x^2 - y^2)}{y}.$$

6. **Solution.** 积分区域 D 如右图所示. 交换积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 dx \int_{x-1}^2 \sin y^2 dy = \int_0^2 dy \int_1^{y+1} \sin y^2 dx \\ &= \int_0^2 y \sin y^2 dy = -\frac{1}{2} \cos y^2 \Big|_0^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cos 4 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 4). \end{aligned}$$

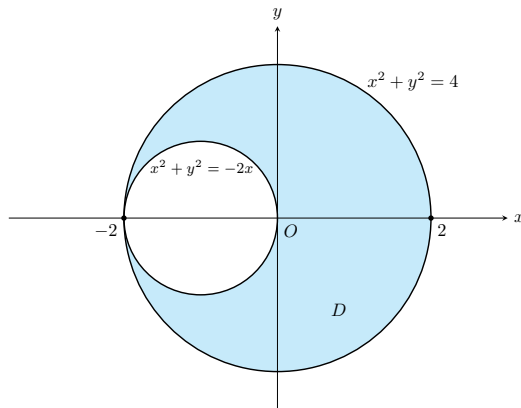


7. **Solution.** 由于积分区域 D 关于 x 轴对称, 所以 $\iint_D y \cos x dx dy = 0$.

$$\text{记 } D' = \{(x, y) | -2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}, \text{ 则 } I = 2 \iint_{D'} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

用极坐标代换, 则

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \iint_{D'} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
 &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{-2\cos\theta}^2 r^2 dr \right) \\
 &= \frac{8}{3}\pi + \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos^3 \theta) d\theta \\
 &= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{16}{9}(3\pi - 2).
 \end{aligned}$$



8. **Solution.** 设过直线 $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ 的平面束方程为 $x + 5y + z + \lambda(x - z + 4) = 0$,

即 $(1 + \lambda)x + 5y + (1 - \lambda)z + 4\lambda = 0$.

令其与平面 $\pi: x - 4y - 8z + 12 = 0$ 垂直, 得 $(1 + \lambda) \cdot 1 + 5 \cdot (-4) + (1 - \lambda) \cdot (-8) = 0$, 解得 $\lambda = 3$.

所以直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程为 $\begin{cases} 4x + 5y - 2z + 12 = 0, \\ x - 4y - 8z + 12 = 0. \end{cases}$

9. **Solution.** 在方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \end{cases}$ 中消去 y , 得 $(x - 1)^2 + (z - 1)^2 = x^2 + z^2$,

即 $x + z = 1$. 将 $z = 1 - x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 得曲线在 xOy 平面上的投影柱面方程: $2x^2 - 2x + y^2 = 0$,

即 $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = 1$. 令 $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos\theta, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi),$ 则 $z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta$,

故曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta. \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

10. **Solution.** 用截面法,

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} e^{1-z} dx dy dz = \int_0^1 e^{1-z} dz \iint_{D_z} dx dy \quad (D_z = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - z)^2 e^{1-z} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 e^z dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 de^z = \frac{1}{2} \left(z^2 e^z \Big|_0^1 - \int_0^1 2ze^z dz \right) \\
 &= \frac{e}{2} - \int_0^1 ze^z dz = \frac{e}{2} - \int_0^1 z de^z \\
 &= \frac{e}{2} - \left(ze^z \Big|_0^1 - \int_0^1 e^z dz \right) = \frac{e}{2} - (e - (e - 1)) \\
 &= \frac{1}{2}e - 1.
 \end{aligned}$$

2 综合题 (每小题 8 分, 共 40 分)

11. **Solution.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -bz + 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 4az^3 - bx$.

所以 $\nabla u|_P = (-bz + 2x, 2y, 4az^3 - bx)|_{(1,1,1)} = (-b + 2, 2, 4a - b)$.

由于函数沿梯度方向的方向导数最大, 所以 $\nabla u|_P / |\nabla u|_P$, 有

$$\frac{-b + 2}{2} = \frac{2}{1} = \frac{4a - b}{2},$$

解得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$. 此时 $\nabla u|_P = (4, 2, 4)$, 所以最大方向导数为 $|\nabla u|_P| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$.

12. **Solution.** 先考虑 D 的内部. 令 $f'_x = 3x^2 - 2(x + y) = f'_y = 3y^2 - 2(x + y) = 0$,

解得唯一驻点 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{10}{27}$.

考虑 D 的坐标轴边界. 由对称性不妨只考虑在 y 轴上时,

此时 $x = 0$, $f(x, 0) = x^3 - x^2 + 2$, 令 $(x^3 - x^2 + 2)' = 3x^2 - 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $\frac{2}{3}$,

$f(0, 0) = 2$, $f\left(0, \frac{2}{3}\right) = f\left(0, \frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}$.

再考虑 D 的斜边边界, 即直线 $x + y = 3$,

此时 $f = x^3 + (3 - x)^3 - 7$, 令 $(x^3 + (3 - x)^3 - 7)' = 3x^2 - 3(3 - x)^2 = 0$, 解得 $x = \frac{3}{2}$,

$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f(3, 0) = f(0, 3) = 20$.

比较得函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 20, 最小值为 $-\frac{10}{27}$.

13. **Solution.** 令 $u = y + t$, 则 $du = dt$, $\int_0^x x e^{-(y+t)^2} dt = x \int_y^{y+x} e^{-u^2} du$.

所以 $z(x, y) = x^y + x \int_y^{y+x} e^{-u^2} du$,

$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + \int_y^{y+x} e^{-u^2} du + x \cdot e^{-(y+x)^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(yx^{y-1} + \int_y^{y+x} e^{-u^2} du + x \cdot e^{-(y+x)^2} \right) \\ &= x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x + e^{-(y+x)^2} - e^{-y^2} + x \cdot e^{-(y+x)^2} \cdot (-2)(y+x) \\ &= x^{y-1} (1 + y \ln x) + e^{-(y+x)^2} (1 - 2x(y+x)) - e^{-y^2}. \end{aligned}$$

从而 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,0)} = -\frac{1}{e}$.

14. **Solution.** 利用 $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$ 可得 $\left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2}$. 所以当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \rightarrow 0$,

由夹逼定理可知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = 0 = f(0, 0)$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处连续.

又 $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$, 所以 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 因此函数 $f(x, y)$ 在原点处的偏导数存在.

$$\text{考察 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

当 $y = x^2, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^5}{2x^4 \sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2|x| \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 不存在,

所以函数 $f(x, y)$ 在原点处不可微.

15. **Solution.** 记区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq b\}$, $I = b \int_0^b f(x)g(x)dx - \int_0^b f(x)dx \int_0^b g(x)dx$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^b dy \int_0^b f(x)g(x)dx - \int_0^b f(x)dx \int_0^b g(y)dy \\ &= \iint_D f(x)g(x)dx dy - \iint_D f(x)g(y)dx dy \\ &= \iint_D f(x)(g(x) - g(y))dx dy. \end{aligned}$$

注意到区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 具有轮换对称性, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x)(g(x) - g(y))dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_D f(x)(g(x) - g(y))dx dy + \iint_D f(y)(g(y) - g(x))dx dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dx dy. \end{aligned}$$

由于函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, b]$ 上单调增加, 所以 $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$, 因此 $I \geq 0$, 即

$$b \int_0^b f(x)g(x)dx \geq \int_0^b f(x)dx \int_0^b g(x)dx.$$