CHAPTER 1

2015-2016 学年微积分（一）（下）期末考试

1　单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则点 P 的坐标是（　　）.

   A. $(1,-1,2)$　　**B.** $(-1,1,2)$　　**C.** $(1,1,2)$　　**D.** $(-1,1,1)$

2. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的以下 4 条性质：

   （1）两个偏导数存在；（2）两个偏导函数连续；（3）可微；（4）沿任意方向的方向导数存在。

   若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　）.

   A. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　**B.** $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

   C. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　**D.** $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

3. 将二次积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

   化为直角坐标系下的二次积分，正确的结果是（　　）.

   A. $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

   B. $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

   C. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

   D. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

4. 设 S 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 被平面 $z=0,z=h$ 截下的部分，则

$$\iint\limits_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=(\qquad).$$

   A. $-2\pi hR^3$　　**B.** $2\pi hR^3$　　**C.** πhR^3　　**D.** $\frac{\pi}{2}R^4h$

5. 下列命题中正确的是（　　）.

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

B. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则 $l < 1$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 绝对收敛

6. 设 $f(x) = x + 1 (0 \le x \le \pi)$，而

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x,$$

则 $S\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = (\quad)$.

A. $-\dfrac{\pi}{2} + 1$　　**B.** $\dfrac{\pi}{2} + 1$　　**C.** $-\dfrac{\pi}{2} - 1$　　**D.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 以曲线

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

为准线，母线平行于 x 轴的柱面方程是____________________.

8. 设 $F = \{y, z, xy\}$，$G = \{1, 0, x\}$，则 $\mathrm{rot}(F \times G) =$________________.

9. 设 $D: x^2 + y^2 \le a^2 (a > 0)$，若

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi,$$

则 $a =$________________.

10. 设 L 为从 $A(1,0)$ 到 $B(2,1)$ 的曲线弧，则

$$\int_L (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y =$$

________________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求过点 $P(1,2,3)$ 且与 z 轴相交、与平面 $x+y+z-2=0$ 平行的直线方程.

12. 设 $z=f\left(\sin x,\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 设函数 $y=y(x), z=z(x)$ 由方程 $z=xf(x+y)$ 以及 $F(x,y,z)=0$ 所确定，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

14. 求三重积分

$$I=\iiint\limits_V (x^2+yz+z^2)\mathrm{d}v,$$

其中 $V: x^2+y^2+z^2\le 1$.

15. 求曲线积分

$$I = \oint_L (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\mathrm{d}y,$$

其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = x + y + 1$，取正向.

16. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 在椭球面 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ 上求一点，使函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点处沿方向 $\boldsymbol{n} = \{0, -1, 1\}$ 的方向导数最大.

18. 设速度场 $\boldsymbol{v} = \{2x^3, 2y^3, 3(z^2 - 1)\}$，$S$ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧，求单位时间内流过曲面 S（上侧）的流量（或通量）

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.$$

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 证明莱布尼兹判别法：若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n(a_n>0)$ 满足（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；（2）$\{a_n\}$ 单调减少，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

20. 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=a$，其中 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$。计算积分

$$I=\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

CHAPTER 2

2015-2016 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. C.
2. **Solution**. A.
3. **Solution**. C.
4. **Solution**. B.
5. **Solution**. D.
6. **Solution**. B.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $3z^2 - y^2 = 16$.
8. **Solution**. $\{0, x, 0\}$.
9. **Solution**. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.
10. **Solution**. 5.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，并与 z 轴相交于点 $Q(0,0,c)$，则

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{PQ} = \{-1, -2, c-3\}.$$

由题设知 $\boldsymbol{s} \perp \{1,1,1\}$，故 $c = 6$. 所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

12. **Solution**. 记 f_1, f_2, f_{12}, f_{22} 分别表示 f 对其变量的一阶、二阶偏导数，则

$$z_x = \cos x\, f_1 + \frac{1}{y} f_2.$$

因而

$$z_{xy} = -\frac{x\cos x}{y^2} f_{12} - \frac{1}{y^2} f_2 - \frac{x}{y^3} f_{22}.$$

13. **Solution**. 对方程组

$$\begin{cases} z = xf(x+y), \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f + x\left(1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) f', \\ F_1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} F_2 + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} F_3 = 0. \end{cases}$$

消去 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(f + xf')F_2 - xf'F_1}{F_2 + xf'F_3}.$$

14. **Solution**. 由球域对称性，

$$\iiint\limits_V yz\,\mathrm{d}v = 0, \qquad \iiint\limits_V (x^2 + yz + z^2)\mathrm{d}v = \frac{2}{3}\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}v.$$

改用球坐标，

$$I = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^4 \mathrm{d}\rho = \frac{8\pi}{15}.$$

15. **Solution**. 由格林公式，

$$I = \iint\limits_D \left[\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D 2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

圆周 $x^2 + y^2 = x + y + 1$ 所围区域 D 的圆心为 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，半径为 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，故

$$I = 2(\bar{x} + \bar{y})\sigma = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3\pi}{2} = 3\pi.$$

16. **Solution**. 令 $t = x - 3$，则原级数化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n3^n}.$$

收敛半径为 3，且当 $t = 3$ 时发散，当 $t = -3$ 时收敛，故原级数收敛域为

$$[0, 6).$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} = -\ln(1-u), \qquad |u| < 1,$$

令 $u = \dfrac{x-3}{3}$，得

$$S(x) = -\ln\left(1 - \frac{x-3}{3}\right), \qquad x \in [0, 6).$$

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 设所求点为 $M(x,y,z)$，则

$$\nabla f(M)=\{2x,2y,2z\},\qquad \boldsymbol{n}^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}.$$

故方向导数为

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{n}}=\sqrt{2}(-y+z).$$

由 Lagrange 乘子法得 $x=0,y=-z$，结合约束 $x^2+2y^2+2z^2=1$，受检点为

$$\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\qquad \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

比较可知最大值点为

$$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

18. **Solution**. 取底面 $S_1: z=0,\ x^2+y^2\le 1$ 的下侧，使 $S+S_1$ 封闭并取外侧法向. 由高斯公式，

$$\Phi=\iiint\limits_V(6x^2+6y^2+6z)\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_1}3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中

$$\iiint\limits_V(6x^2+6y^2+6z)\mathrm{d}v=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(r^2+z)\mathrm{d}z=2\pi,$$

且

$$\iint\limits_{S_1}3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi.$$

因此

$$\Phi=-\pi.$$

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 参见教材中莱布尼兹判别法的证明.

20. **Solution**. 因 $f(1,y)=0,f(x,1)=0$，所以

$$f_y(1,y)=0,\qquad f_x(x,1)=0.$$

由两次分部积分，

$$\begin{aligned}
I=\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xyf_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\,[xyf_x(x,y)]_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xf_x(x,y)\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^1\mathrm{d}y\,[xf(x,y)]_0^1+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\\
&=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=a.
\end{aligned}$$