CHAPTER 1

2016-2017 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 考虑二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的下面四条性质：

   （1）连续；（2）两个偏导存在；（3）可微；（4）沿方向 $\{1, 0\}$ 的方向导数存在。

   若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则成立（　　）.

   A. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$　　**B.** $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

   C. $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$　　**D.** $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$

2. 将逐次积分

   $$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-y}^{y} f(x, y)\mathrm{d}x$$

   化为先对 y 后对 x 的逐次积分，正确结果是（　　）.

   A. $I = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{x}^{1} f(x, y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{1} f(x, y)\mathrm{d}y$

   B. $I = \int_{-y}^{y} \mathrm{d}x \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y$

   C. $I = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{-x}^{1} f(x, y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x}^{1} f(x, y)\mathrm{d}y$

   D. $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} f(x, y)\mathrm{d}y$

3. 设 L 表示圆 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$，取顺时针方向，则积分

   $$\oint_L (-xy^2)\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = (\quad).$$

   A. $\frac{\pi R^4}{4}$　　**B.** $-\frac{\pi R^4}{2}$　　**C.** $-\pi R^4$　　**D.** $\frac{\pi R^4}{2}$

4. 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$，下列说法中正确的是（　　）.

A. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散

B. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散

C. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛

D. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则当 n 充分大时，$a_n \geq \dfrac{1}{n}$

5. 二阶常系数线性微分方程

$$y'' - 3y' - 4y = x + e^{-x}$$

的特解的待定形式为（ ）.

A. $y^* = ax + b + ce^{-x}$ **B.** $y^* = x(ax+b) + (cx+d)e^{-x}$ **C.** $y^* = ax + b + cxe^{-x}$ **D.** $y^* = x(ax+b$

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是将函数 $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq \pi)$ 做奇延拓后展开成的傅立叶级数，其和函数为 $S(x)(-\infty < x < +\infty)$，则

$$S\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = (\quad).$$

A. $-\dfrac{\pi}{2}+1$ **B.** $\dfrac{\pi}{2}+1$ **C.** $-\dfrac{\pi}{2}-1$ **D.** $\dfrac{\pi}{2}-1$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 设函数 $z = xe^y$，则 $\mathrm{d}z|_{x=0,y=1} =$________________.

8. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$，则

$$\iint\limits_D \left[(x+1)^2 + y^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

________________.

9. 设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$，则

$$\oint\limits_L (x + xy)\mathrm{d}s =$$

________________.

10. 设曲面 $S = \{(x,y,z) : z = 1, x \leq 1, y \leq 1\}$，则

$$\iint\limits_S (x + y + z)\mathrm{d}S =$$

________________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求经过直线

$$L:\begin{cases}2x+3y-z-8=0,\\ y-3z+4=0\end{cases}$$

且与平面 $\pi: x+y+z-4=0$ 平行的平面方程 π_1.

12. 设 $z=f(e^{2x},xy)$，其中 f 具有二阶连续导数，且 $f_2'(1,0)=2$，求

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=0,y=3}.$$

13. 设变量 x,y,t 满足方程 $x=F(t,y)$ 和 $f(x+y+t)=3y$，其中 f 具有一阶连续导数，F 具有一阶连续偏导数，记

$$F_1=\frac{\partial F(t,y)}{\partial t},\qquad F_2=\frac{\partial F(t,y)}{\partial y},$$

且 $1+F_1\neq 0$, $f'\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

14. 设 L 是依逆时针方向的下半圆周 $x^2+y^2=x\ (y\leq 0)$，求曲线积分

$$I=\int_L(1-y-e^x\sin y)\mathrm{d}x+(1-e^x\cos y)\mathrm{d}y.$$

15. 设 S 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，求曲面积分

$$I=\iint_S xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{z^3}{3}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

16. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 求函数 $f(x,y,z)=xy+z^2$ 在平面 $x=y$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交的圆周上的最大值和最小值.

18. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $\varphi(0)=0$，

$$\varphi'(x)+\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t=e^x,$$

求 $\varphi(x)$.

5 分析证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^p}\right)-\cos\left(\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right] \qquad (p>0)$$

的敛散性，收敛时指明是条件收敛还是绝对收敛.

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b](a>0)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\left(\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{x}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\geq \frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4}.$$

CHAPTER 2

2016-2017 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.
2. **Solution**. C.
3. **Solution**. B.
4. **Solution**. A.
5. **Solution**. C.
6. **Solution**. C.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $e\,\mathrm{d}x$.
8. **Solution**. $\dfrac{3\pi}{4}$.
9. **Solution**. π.
10. **Solution**. 4.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 设所求平面为 $\pi_1 : x+y+z+D=0$. 取直线 L 上一点 $P(10,-4,0)$，代入得 $D=-6$，故

$$\pi_1 : x+y+z-6=0.$$

12. **Solution**. 先求

$$z_x = 2e^{2x} f_1(e^{2x}, xy) + y f_2(e^{2x}, xy).$$

令
$$G(x,y)=2e^{2x}f_1(e^{2x},xy)+yf_2(e^{2x},xy),$$
则
$$G(0,y)=2f_1(1,0)+yf_2(1,0),$$
因而
$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=0,y=3}=G_y(0,3)=f_2(1,0)=2.$$

13. **Solution**. 由
$$\begin{cases}x=F(t,y),\\ f(x+y+t)=3y\end{cases}$$
确定 $t=t(y),x=x(y)$. 两边对 y 求导得
$$\begin{cases}x'=F_1t'+F_2,\\ (x'+t'+1)f'=3.\end{cases}$$
解得
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{f'F_2+(3-f')F_1}{(1+F_1)f'}.$$

14. **Solution**. 补线段 $L_1: y=0,\ x:1\to 0$，则 $L+L_1$ 封闭并取正向. 故
$$I=\oint_{L+L_1}(1-y-e^x\sin y)\mathrm{d}x+(1-e^x\cos y)\mathrm{d}y-\int_{L_1}\mathrm{d}x.$$
由格林公式，
$$\oint_{L+L_1}\cdots=\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8},$$
且
$$\int_{L_1}(1-y-e^x\sin y)\mathrm{d}x+(1-e^x\cos y)\mathrm{d}y=\int_1^0\mathrm{d}x=-1.$$
因此
$$I=\frac{\pi}{8}+1.$$

15. **Solution**. 记底面 $S_1: z=0,\ x^2+y^2\le 1$，取下侧，则 $S+S_1$ 封闭并指向内侧. 因而
$$I=-\iiint\limits_V(yz+x^2+z^2)\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
由对称性，$\iiint\limits_V yz\,\mathrm{d}v=0$. 再用球坐标计算
$$\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}v=\frac{\pi}{15},\qquad \iiint\limits_V z^2\mathrm{d}v=\frac{\pi}{5},$$
且
$$\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.$$
所以
$$I=-\left(\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{5}\right)+\pi=\frac{11\pi}{15}.$$

16. **Solution**. 因

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \qquad |x| < 1,$$

故对 $[0,x]$ 积分并利用 $f(0) = \frac{\pi}{4}$，得

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in [-1,1).$$

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 在约束 $x = y$ 与 $x^2+y^2+z^2 = 4$ 下，

$$f(x,y,z) = xy + z^2 = x^2 + z^2 = 4 - x^2.$$

由 $2x^2 + z^2 = 4$ 知 $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. 因而最大值为 4，在 $(0,0,\pm 2)$ 处取得；最小值为 2，在 $(\pm 1, \pm 1, 0)$ 处取得.

18. **Solution**. 对原方程两边求导，得

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = e^x.$$

又由原方程在 $x = 0$ 处可得 $\varphi'(0) = 1$，再结合 $\varphi(0) = 0$，得到定解问题

$$\begin{cases} \varphi'' + \varphi = e^x, \\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1. \end{cases}$$

解得

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(-\cos x + \sin x + e^x\big).$$

5 分析证明题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Solution**. 设

$$u_n = 1 - \cos\frac{(-1)^n}{n^p}, \qquad v_n = \sin\frac{(-1)^n}{n^p}.$$

则原级数可视作 $\sum u_n - \sum v_n$. 由

$$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2} \quad (t \to 0)$$

知 $\sum u_n$ 当且仅当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛. 又

$$v_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n^p}$$

是交错级数，且 $\sin\frac{1}{n^p} \sim \frac{1}{n^p}$，故当 $p > 0$ 时由莱布尼兹判别法收敛；当 $p > 1$ 时绝对收敛，当 $0 < p \le 1$ 时仅条件收敛. 综上，原级数当 $p > 1$ 时绝对收敛，当 $\frac{1}{2} < p \le 1$ 时条件收敛，当 $0 < p \le \frac{1}{2}$ 时发散.

20. **Proof**. 设

$$I = \left(\int_a^b x f(x) \mathrm{d}x\right) \left(\int_a^b \frac{x}{f(x)} \mathrm{d}x\right).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$I \geq \left(\int_a^b x \,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2(b-a)^2}{4}.$$

证毕.