CHAPTER 1

2018-2019 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = x^2$ 的解，则以下函数中也是该微分方程的解的是（　　）.

   A. $y_1 + y_2 + y_3$

   B. $\frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3$

   C. $y_1 - y_2$

   D. $2y_3$

2. 以下函数在原点可微的是（　　）.

   A. $z = x^2 + y^2$　　**B.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   C. $z = x - y$　　**D.** $z = \sqrt{xy}$

3. 设 $F(x, y) = 0$ 是一条平面光滑曲线，则以下说法中正确的是（　　）.

   A. $\{F_x, F_y\}$ 是该曲线的切矢量　　**B.** $\{F_y, F_x\}$ 是该曲线的法矢量

   C. $\{-F_y, F_x\}$ 是该曲线的切矢量　　**D.** $\{-F_x, F_y\}$ 是该曲线的法矢量

4. 设平面区域 D 由 $x^2 + y^2 \leq 1$ 表示，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则

$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) \mathrm{d}\sigma = (\quad).$$

   A. 0　　**B.** $4\iint_{D_1} xy \mathrm{d}\sigma$

   C. $4\iint_{D_1} \cos x \sin y \mathrm{d}\sigma$　　**D.** $4\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) \mathrm{d}\sigma$

5. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成，$I=\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}v$，则以下表达式错误的是（　　）.

A. $I=\pi\int_0^1 zf(z)\mathrm{d}z$

B. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 f(z)\mathrm{d}z$

C. $I=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1 f(z)\mathrm{d}z$

D. $I=2\pi\int_0^1 f(z)\mathrm{d}z\int_0^z r\mathrm{d}r$

6. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则以下说法中正确的是（　　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 微分方程 $y''+2y'+y=x+2$ 的通解为__________.

8. 设 $z=f(x^2+y^2,xy)$，其中 f 有连续偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

9. 设 $f(x,y,z)=x^3+y^5+z^4$，则 $\mathrm{div}\,\mathbf{grad}f=$__________.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n3^n}=$__________.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求点 $A(1,2,3)$ 到直线 $L:\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$ 的距离.

12. 设方程组
$$\begin{cases} x^2-2x+y^2+\ln z+z^3=1, \\ x+y+z=1 \end{cases}$$
在包含点 $(0,0,1)$ 的一个邻域上确定隐函数 $y=y(x), z=z(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

13. 求函数 $f(x,y)=4x+2xy-x^2-3y^2$ 的极值.

14. 求 $I=\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

15. 求曲线积分 $I=\displaystyle\int_L(2xy-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(x^2-2y\sin x)\mathrm{d}y$，其中曲线 L 沿抛物线 $y=\pi x-x^2+1$ 从 $A(0,1)$ 到 $B(\pi,1)$.

16. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}$ 的敛散性，若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛，并说明理由.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 求曲面 $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2$ 的面积.

18. 计算曲面积分 $I = \iint\limits_S 3xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围立体的表面外侧.

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 L 是圆周曲线 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$（取正向），$f(x)$ 为正值连续函数。证明：

$$\oint_L xf(y)\mathrm{d}y - f(x)\mathrm{d}x \geq 2\pi.$$

20. 证明：当 $-\pi < x < \pi$ 时，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} = \frac{x}{2}$.

CHAPTER 2

2018-2019 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. B.
2. **Solution**. A.
3. **Solution**. C.
4. **Solution**. A.
5. **Solution**. D.
6. **Solution**. B.

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x$.
8. **Solution**. $2xf_1 + yf_2$.
9. **Solution**. $6x + 20y^3 + 12z^2$.
10. **Solution**. $\ln 3$.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 取直线 L 上一点 $B(6,1,6)$，则

$$\overrightarrow{AB} = \{5,-1,3\}, \qquad \boldsymbol{s} = \{-1,1,-2\}.$$

所求距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|} = \frac{|\{-1,7,4\}|}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}.$$

12. **Solution**. 对方程组对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x-2+2yy'+\dfrac{z'}{z}+3z^2z'=0, \\ 1+y'+z'=0. \end{cases}$$

在 $(0,0,1)$ 处化为

$$\begin{cases} -2+4z'(0)=0, \\ 1+y'(0)+z'(0)=0. \end{cases}$$

解得

$$y'(0)=-\frac{3}{2}, \qquad z'(0)=\frac{1}{2}.$$

13. **Solution**. 令

$$\begin{cases} f_x=4+2y-2x=0, \\ f_y=2x-6y=0. \end{cases}$$

解得唯一驻点 $(3,1)$. 又

$$f_{xx}=-2, \quad f_{yy}=-6, \quad f_{xy}=2, \quad \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=8>0,$$

且 $f_{xx}<0$，故在 $(3,1)$ 处取得极大值

$$f(3,1)=6.$$

14. **Solution**. 由轮换对称性，

$$I=3\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v.$$

截面 $z=$ 常数 与 Ω 相交所得三角形面积为 $\dfrac{(1-z)^2}{2}$，故

$$I=3\int_0^1 z\cdot\frac{(1-z)^2}{2}\mathrm{d}z=\frac{1}{8}.$$

15. **Solution**. 因

$$Q_x=2x-2y\cos x, \qquad P_y=2x-2y\cos x,$$

所以被积表达式是某个二元函数的全微分. 直接凑微分可得原函数为 $F(x,y)=x^2y-y^2\sin x$，故

$$I=F(\pi,1)-F(0,1)=\pi^2.$$

16. **Solution**. 对正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)!!}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)!!}$$

分别用比值判别法，都可判定收敛. 因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}\right|$$

亦收敛，故原级数绝对收敛.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 曲面面积元

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

投影区域为 $D: x^2+y^2\le 2$，故

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{3}.$$

18. **Solution**. 由 Gauss 公式，

$$I=\iiint\limits_\Omega 2z\,\mathrm{d}v.$$

改用球坐标，可得

$$I=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\pi.$$

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 由 Green 公式，

$$\oint\limits_L xf(y)\mathrm{d}y-f(x)\mathrm{d}x=\iint\limits_D \big(f(y)+f(x)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由区域 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$ 的轮换对称性，

$$\iint\limits_D f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又因 $f(x)>0$，从而

$$\oint\limits_L xf(y)\mathrm{d}y-f(x)\mathrm{d}x=2\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 2\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

20. **Proof**. 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上作 2π 周期延拓并展开为傅立叶级数. 由奇偶性知 $a_n=0$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

因此其正弦级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n},$$

由傅立叶级数收敛定理可得当 $-\pi<x<\pi$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}=\frac{x}{2}.$$