CHAPTER 1

2020-2021 学年微积分（一）（下）期末考试

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2x - 2e^x$ 的特解 y^* 的形式是【　】.

A. $y^* = (Ax + B)e^x$　　**B.** $y^* = x(Ax + B)e^x$

C. $y^* = Ax + B + Ce^x$　　**D.** $y^* = Ax + B + Cxe^x$

2. 设曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$，点 $M(1, -1, 0)$，则在点 M 处下列说法 **不正确** 的是【　】.

A. 切矢量为 $\{-2, -2, 4\}$　　**B.** 切矢量为 $\{-2, 2, 4\}$

C. 切线方程为 $x - 1 = y + 1 = -\dfrac{z}{2}$　　**D.** 法平面方程为 $x + y - 2z = 0$

3. 函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处【　】.

A. 可微　　**B.** 偏导数存在

C. 连续　　**D.** 不连续

4. 已知函数 f 连续，则二次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r =$【　】.

A. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y$

B. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y$

C. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\mathrm{d}x$

D. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 f(x, y)\mathrm{d}y$

5. 设 $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$，$I = \displaystyle\oint_\Gamma x\mathrm{d}s$，$J = \displaystyle\oint_\Gamma y\mathrm{d}s$，$K = \displaystyle\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s$. 以下说法中正确的是【　】.

A. $K=0$

B. I,J,K 中有两个等于 0

C. I,J,K 都等于 0

D. I,J,K 全都不等于 0

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$。以下说法中正确的是【 】.

A. $S(x)$ 处处连续

B. $S(x)\equiv f(x)$

C. $S(-1)=0$

D. $S(0)=\pi$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. 直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $x-y+2z+4=0$ 的夹角是 __________.

8. 设 $P_0(1,1,-1)$，$P_1(2,-1,0)$，则 $u=x+y^2+z^3$ 在 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为 __________.

9. 若 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $z_x(0,0)=$ __________.

10. 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\ (-\infty<x<\infty)$ 的和函数为 ____.

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\dfrac{y}{x}$ 的通解.

12. 已知函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 有二阶连续偏导数，g 可导，求 z_x，z_{xy}.

13. 计算二次积分 $I = \int_{1}^{3} \mathrm{d}x \int_{x-1}^{2} \sin y^2 \mathrm{d}y$.

14. 求三重积分 $I = \iiint\limits_{V} (x^3 + y^2 + z) dv$，其中 V 为 $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$，$a > 0$.

15. 求 $I = \iint\limits_{S} (z^2 + x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\ (0 \le z \le 2)$ 下侧.

16. 将 $f(x) = \arctan x$ 展开为 Maclaurin 级数，并求 $f^{(20)}(0)$，$f^{(21)}(0)$.

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. 求 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

18. 已知曲线积分 $\int_L yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 和 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 的值.

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. 设 $D:x^2+y^2\leq 1$，证明不等式：$\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq \frac{2}{5}\pi$.

20. 设 $f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有界，证明：$\alpha>\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)-1\right)$ 绝对收敛.

CHAPTER 2

2020-2021 学年微积分（一）（下）期末考试参考答案

1 单项选择题 (每小题 3 分，共 18 分)

1. **Solution**. D.

   右端 $2x-2e^x$ 可分成一次多项式项与指数项两部分. 齐次方程特征方程为

   $$r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0,$$

   故 e^x 已在齐次解中出现，因此对应特解应乘以 x. 所以可设

   $$y^*=Ax+B+Cxe^x.$$

2. **Solution**. B.

   两曲面的法向量分别为

   $$\nabla(x^2+y^2+z^2)=(2x,2y,2z),\quad \nabla(x+y+z)=(1,1,1).$$

   在 $M(1,-1,0)$ 处取值得

   $$(2,-2,0),\quad (1,1,1).$$

   叉积可取为

   $$(2,-2,0)\times(1,1,1)=(-2,-2,4),$$

   所以 A、C、D 都正确，而 B 不是切向方向.

3. **Solution**. C.

   函数

   $$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

   在 $(0,0)$ 连续，但沿 x 轴有

   $$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{|h|}{h},$$

   极限不存在，所以偏导数不存在，更不可微.

4. **Solution**. C.

极坐标区域为

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\sin\theta,$$

即第一象限内圆

$$x^2 + (y-1)^2 \le 1$$

的部分. 改写成直角坐标可得

$$0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le \sqrt{2y - y^2},$$

故选 C.

5. **Solution**. B.

由对称性可知

$$\oint_\Gamma x \, \mathrm{d}s = \oint_\Gamma y \, \mathrm{d}s = 0.$$

但 $z^2 \ge 0$ 且不恒为零，因此

$$\oint_\Gamma z^2 \, \mathrm{d}s > 0.$$

所以恰有两个积分为零.

6. **Solution**. C.

傅里叶级数在连续点收敛到原函数值，在跳跃点收敛到左右极限平均值. 因为 $-1 \in (-\pi, 0)$，故

$$S(-1) = f(-1) = 0.$$

而

$$S(0) = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \ne \pi.$$

2 填空题 (每小题 4 分，共 16 分)

7. **Solution**. $\frac{\pi}{6}$.

直线方向向量为 $(2,1,1)$，平面法向量为 $(1,-1,2)$. 设夹角为 θ，则

$$\sin\theta = \frac{|(2,1,1)\cdot(1,-1,2)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

所以

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

8. **Solution**. 0.

$$\nabla u = (1, 2y, 3z^2),$$

在 $P_0(1,1,-1)$ 处为 $(1,2,3)$. 又

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (1,-2,1),$$

二者点积为 0，故方向导数为 0.

9. **Solution**. $-\dfrac{1}{3}$.

对

$$e^{x+2y+3z}+xyz=1$$

关于 x 求偏导，得

$$e^{x+2y+3z}(1+3z_x)+yz+xz\,z_x=0.$$

在 $(0,0)$ 处有 $z=0$，从而

$$1+3z_x(0,0)=0,\qquad z_x(0,0)=-\frac{1}{3}.$$

10. **Solution**. $\cos x$.

这是余弦函数的 Maclaurin 级数：

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

3 基本计算题 (每小题 7 分，共 42 分)

11. **Solution**. 令

$$u=\frac{y}{x},\qquad y=ux.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

原方程化为

$$x\left(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=ux\ln u,$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(\ln u-1).$$

分离变量并积分得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Longrightarrow \ln\frac{y}{x}=Cx+1.$$

12. **Solution**. 记

$$u=xy,\qquad v=yg(x),$$

则 $z=f(u,v)$. 由链式法则

$$z_x=f_1'u_x+f_2'v_x=y(f_1'+g'(x)f_2').$$

再对 y 求偏导，得

$$z_{xy}=f_1'+g'(x)f_2'+xyf_{11}''+[g(x)+xyg'(x)]f_{12}''+yg'(x)g(x)f_{22}''.$$

13. **Solution**. 原积分区域为

$$1\le x\le 3,\quad x-1\le y\le 2.$$

交换积分次序后可写成

$$0\le y\le 2,\quad 1\le x\le y+1.$$

因而

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_1^{y+1} \sin y^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^2 y \sin y^2 \,\mathrm{d}y.$$

令 $t = y^2$，则

$$I = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1 - \cos 4).$$

14. **Solution**. 由球域关于原点的对称性，

$$\iiint_V x^3 \,\mathrm{d}v = 0, \qquad \iiint_V z \,\mathrm{d}v = 0,$$

所以

$$I = \iiint_V y^2 \,\mathrm{d}v.$$

由轮换对称性，

$$3I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}v.$$

用球坐标计算得

$$3I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^4 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi a^5}{5},$$

所以

$$I = \frac{4\pi a^5}{15}.$$

15. **Solution**. 记

$$P = z^2 + x, \qquad Q = 0, \qquad R = -z.$$

将侧面与上盖平面 $z = 2$ 补成闭曲面，所围区域记为 Ω. 由高斯公式

$$\iint_{\partial\Omega} P \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) \,\mathrm{d}v.$$

这里

$$P_x + Q_y + R_z = 1 - 1 = 0,$$

所以侧面与上盖面的通量之和为零. 再计算上盖面的贡献，可得原积分

$$I = 8\pi.$$

16. **Solution**. 由

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (|x| < 1)$$

两端积分，得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad |x| \le 1.$$

比较 Maclaurin 展开系数可知

$$f^{(20)}(0) = 0, \qquad f^{(21)}(0) = 20!.$$

4 应用题 (每小题 7 分，共 14 分)

17. **Solution**. 由

$$f_x = 4x^3 - 2x - 2y, \qquad f_y = 4y^3 - 2x - 2y$$

解驻点方程可得

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1).$$

再由

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f_{xy} = -2$$

判别知 $(1, 1)$ 与 $(-1, -1)$ 是极小值点，且

$$f(1, 1) = f(-1, -1) = -2.$$

点 $(0, 0)$ 不是极值点.

18. **Solution**. 记

$$P(x, y) = yf(x), \qquad Q(x, y) = f(x) - x^2.$$

由路径无关得

$$P_y = Q_x,$$

即

$$f'(x) - f(x) = 2x.$$

解得

$$f(x) = Ce^x - 2x - 2.$$

再由 $f(0) = 1$ 得 $C = 3$，故

$$f(x) = 3e^x - 2x - 2.$$

取折线路径 $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$，第一段积分为 0，第二段积分为

$$\int_0^1 [f(1) - 1]\,\mathrm{d}y = f(1) - 1 = 3e - 5.$$

所以

$$I = 3e - 5.$$

5 综合题 (每小题 5 分，共 10 分)

19. **Proof**. 令

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

则

$$\iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sin(r^3)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1 r\sin(r^3)\,\mathrm{d}r.$$

由 $\sin t \le t$（$t \ge 0$）得

$$2\pi\int_0^1 r\sin(r^3)\,\mathrm{d}r \le 2\pi\int_0^1 r \cdot r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{5}.$$

于是原不等式成立.

20. **Proof**. 因 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有界，设

$$|f''(x)| \le M \qquad (|x|<1).$$

对 $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$，由 Taylor 公式

$$f(x_n) = f(0) + f'(0)x_n + \frac{f''(\theta_n x_n)}{2}x_n^2,$$

其中 $0<\theta_n<1$. 利用 $f(0)=1$, $f'(0)=0$ 得

$$f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 = \frac{f''(\theta_n/n^\alpha)}{2n^{2\alpha}}.$$

所以

$$\left| f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 \right| \le \frac{M}{2n^{2\alpha}}.$$

当 $\alpha > \dfrac{1}{2}$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

收敛，于是由比较判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 \right|$$

收敛，即原级数绝对收敛.